Klasse ET1b /SoSe 05 /ung

DMa 2 Serie 10

Aufgabe 1

Schreiben Sie ein Struktogramm für die Unter- bzw. Obersumme mit *fortgesetzter Halbierung*.
Bereits gerechnete Funktionswerte sollen wieder verwendet werden.

Eingabe: a, b, Toleranz ε für die Genauigkeit, f soll separat in einem m-File gespeichert werden.

Ausgabe: U_n, O_n, n, sowie das zuletzt verwendete $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$

Aufgabe 2

Riemann'sche Summe:

a) Bestimmen Sie en Flächeninhalt der Fläche, die von der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$, der $x-$Achse und den Geraden $x = 1$ bzw. $x = 2$ eingeschlossen wird. Benützen Sie dazu eine äquidistante Intervalleinteilung und wählen Sie die Zwischenwerte ξ_k $(x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k)$ so, dass

$$f(\xi_k) = \sqrt{f(x_{k-1}) \cdot f(x_k)}$$

ist. Beachten Sie dabei, dass $\frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, (PBZ = Partial-Bruch-Zerlegung)

b) Dieselbe Fläche, jetzt aber neu mit den beiden vertikalen Graden $x = 1$ und $x = b$, wobei $b > 1$.

c) Wohin strebt der Inhalt der Fläche, falls die obere Grenze $b \to \infty$ strebt?

Aufgabe 3

Geometrische Zerlegung von $[1, a]$, $a > 1$
$x_1 = 1$, $x_2 = q$, $x_3 = q^2$, $x_4 = q^3$, ..., $x_k = q^{k-1}$ und schliesslich $x_{n+1} = a = q^n$
Es soll ein Näherungswert für $I = \int_1^a \frac{1}{x}\,dx$ angegeben werden.

a) Bestimmen Sie für diese Zerlegung die Unter- bzw. Obersumme für $q = \sqrt[n]{a}$.

b) $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = ?$

Aufgabe 4

Berechnen Sie mit der *Trapezwert-Methode* eine Näherung des Integrals

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2$$

mit einer Toleranz $\varepsilon = 10^{-3}$ für die Genauigkeit.

Aufgabe 5

Es gilt

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad \text{exakt}$$

Die numerische Integration erlaubt hier eine approximative Berechnung der Zahl π.
Berechnen Sie π mit der *Trapezwert-Methode* (fortgesetzte Halbierung).

DMa 2 Lösungen Serie 10

Lösung 1

Eingabe:	a, b, ε	f konvex
	$h = b - a$	
	$O_n = h\, f(b)$	
	$U_n = h\, f(a)$	
	$zh = 1$	
	so lange $\lvert U_n - O_n \rvert > \varepsilon\, O_n$	
	(relativer Fehler)	
	$U_a = U_n$	
	$O_a = O_n$	
	$zh = 2 \cdot zh$	
	$h = h/2$	
	$j = 1$	
	$m_u = m_o = 0$	
	so lange $j < zh$ (neue Mitten)	
	$m_u = m_u + f(a + j \cdot h)$	
	$m_o = m_o + f(a + (j+1) \cdot h)$	
	$j = j + 2$	
	$U_n = 1/2 \cdot U_a + h \cdot m_u$	
	$O_n = 1/2 \cdot O_a + h \cdot m_o$	
Ausgabe:	U_n, O_n, n, h	

Lösung 2

a) $x_0 = 1$ und $x_n = 2$, sowie $x_k = 1 + k\,\frac{1}{n}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$f(\xi_k) = \frac{1}{\xi_k^2} = \frac{1}{x_{k-1}}\,\frac{1}{x_k} = \frac{1}{\left(1 + \frac{k-1}{n}\right)\,\left(1 + \frac{k}{n}\right)}$$

und damit $R_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

b) $R_n = \left(1 - \frac{1}{b}\right)$, $b > 1$

c) $\lim_{b\to\infty} R_n = 1$

Lösung 3

a) $O_n = 1\,(q-1) + \frac{1}{q}\,(q^2 - q) + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}}\,(q^n - q^{n-1}) = n\,(q-1) = n\,(\sqrt[n]{a} - 1)$

b) $\lim_{n\to\infty} O_n = \ln(a)$ mit Hilfe von *Bernoulli*

Lösung 4

$T = 0.69339120220753\ldots = \ln(2)$

Lösung 5

T_k	$h = \Delta x$
$T_0 = 4 \cdot 0.75$	1
$T_1 = 4 \cdot 0.775$	0.5
$T_2 = 4 \cdot 0.782794$	0.25
$T_3 = 4 \cdot 0.784749$	0.125
$T_4 = \ldots$	0.0625
$\ldots$	$\ldots$