Klasse ET04b/SoSe 06 /ung

IMa2 Serie 7

Aufgabe 1

Integration von

$$I = \int_0^{0.2} \sqrt{1 - x^3}\, dx$$

mit Hilfe einer Taylorreihe des Integranden. Der absolute Fehler soll kleiner als $\frac{1}{2} \cdot 10^{-13}$ sein.
Wieviele Terme der Entwicklung werden für diese Genauigkeit gebraucht?

Aufgabe 2

Formel von Euler: $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \sin\varphi$

a) Entwickeln Sie $e^{j\varphi}$ mit einer Taylorreihe, Entwicklungszentrum $\varphi_0 = 0$.

b) Trennen Sie die Real- und Imaginärteile und zeigen Sie so, dass die Formel von Euler gültig ist, bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ.

c) analog für $e^{-j\varphi}$.

Aufgabe 3

Entwickeln Sie $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

a) in eine Taylorreihe, geben Sie t_0 an und bestimmen Sie zudem den Konvergnezradius ρ.

b) Entwickeln Sie mit Hilfe von a) $g(x) = \arcsin(x)$.

c) Geben Sie mit dem Resultat von b) die Entwicklung von $\arccos(x)$ an.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k$, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$f(0) = f'(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad f'' = -f.$$

b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + y = 0$ mit den AB $y(0) = y'(0) = 1$.

Aufgabe 5

Lösen Sie die gegebene Differentialgleichung

$$(1 - x) \cdot y' + y = 2x$$

a) mit Hilfe eines Potenzreihen-Ansatzes, wobei $x_0 = 0$. Bestimmen Sie überdies den Konvergenzradius ρ.

b) Können Sie die exakte Lösung bestimmen?

IMa2 Lösungen Serie 7

Lösung 1

Binomialreihe mit $\alpha = \frac{1}{2}$: $\sqrt{1-x^3} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k \cdot x^{3k}$
$I = 0.199799770786098$ mit 5 Termen.

Lösung 2

Die Exponentialreihe ist auch konvergent für komplexe Argumente

a) $e^{j\varphi} = 1 + \frac{j\varphi}{1!} + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{(j\varphi)^3}{3!} + \ldots + \frac{(j\varphi)^k}{k!} + \ldots$

b) $e^{j\varphi} = \left(1 - \frac{(\varphi)^2}{2!} + \frac{(\varphi)^4}{4!} - + \ldots\right) + j\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{(\varphi)^3}{3!} + \frac{(\varphi)^5}{5!} - + \ldots\right) = \cos\varphi + j\sin\varphi$, $\rho = \infty$ für beide Teile.

c) mit der Entwicklung von a): $e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi$

Lösung 3

a) Binomialreihe für $\alpha = -\frac{1}{2}$: $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n\, t^{2n}$, wobei $t_0 = 0$ und $\rho = 1$.

b) gliedweise Integration: $\arcsin(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \int\limits_0^x t^{2n}\, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

und damit: $\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots$, wobei $\rho = 1$

c) $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) = \ldots$

Lösung 4

a) $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ und $f''(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$, einsetzen und Koeffizientenvergleich:

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)} \quad n = 0, 1, \ldots \quad f(0) = 1: \; a_0 = 1 \quad f'(0) = 1: \; a_1 = 1$$

mit Hilfe der vollständigen Induktion folgt:

$$a_{2n} = (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!} \quad n = 0, 1, \ldots \qquad a_{2n-1} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n-1)!} \quad n = 1, 2, \ldots$$

b) $y(x) = \cos(x) + \sin(x)$

Lösung 5

$y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $y'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ einsetzen, Koeffizientenvergleich liefert:

a)

$$a_1 = -a_0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_k = \frac{2}{(k-1)k} \qquad k \geq 2$$

b) separierbare Dgl: $y_a = y_h + y_p$, wobei $y_h(x) = C\cdot(x-1)$ $\mathbb{C} \in \mathbb{R}$. Mit dem Ansatz $y_p(x) = C(x)\cdot(x-1)$ erhalten wir $C'(x) = -\frac{2x}{(x-1)^2}$, $C(x) = \ldots$ mit Hilfe der PBZ und schliesslich:

$y_p(x) = -2 \cdot \left(\ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right)$