Klasse ET04b/SoSe 06 /ung

IMa2 Serie 9

Aufgabe 1

Gegeben ist $f(x,\, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Gesucht sind $f_x(x,\, y)$ und $f_y(x,\, y)$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen der gegebenen Funktionen:

a) $z = f(x,\, y) = -4x^3y^2 + 3xy^4 - 3x + 2y + 5$

b) $z = f(x,\, y) = \ln(x + y^2) - e^{2xy} + 3x$

c) $u = f(x,\, y,\, z) = 2x \cdot e^{yz} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Aufgabe 3

a) Gesucht ist die Koordinatengleichung der Tangentialebene τ der Fläche $z = f(x,\, y) = 3x^2 + xy - y^2 - 4x - 5y + 1$ im Punkt $P(2,\, -3,\, z_p)$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente der Kurve $x^3 - 2y^2 = 0$ im Kurvenpunkt $Q(2,\, y_q)$. (graphische Darstellung, *alle* Lösungen)

Aufgabe 4

Gegeben ist $f_x(x,\, y) = 3x^2y + 2xy^2 + 2x - y + 3$; gesucht ist $z = f(x,\, y)$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Tangentialebene τ an die Fläche

$$z = f(x,\, y) = \frac{3x^2 + 2xy^2}{1 - x} \qquad \text{im Punkt} \quad P(2,\, 1,\, z_p)$$

Aufgabe 6

a) Gegeben ist $f(x,\, y) = x^3y$.

b) Gegeben ist $f(x,\, y,\, z,\, u) = 3\cos(u + 2x) - e^{yz} + \ln(xyz)$.

Gesucht ist der entsprechende Gradient grad$f = \nabla f$.

IMa2 Lösungen Serie 9

Lösung 1

$$f_x(x,\,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad f_y(x,\,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Lösung 2

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = -12x^2y^2 + 3y^4 - 3$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = -8x^3y + 12xy^3 + 2$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2} - 2ye^{2xy} + 3$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2} - 2xe^{2xy}$

c) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cdot e^{yz} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xz \cdot e^{yz} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ und $\frac{\partial u}{\partial z} = 2xy \cdot e^{yz} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Lösung 3

a) $z_p = 5$ und $f_x(2,\,-3) = 5$, $f_y(2,\,-3) = 3$, also
Ebenengleichung $\tau:\; 5x + 3y - z + 4 = 0$

b) hier ist speziell $z = 0$:
somit $0 = f_x(2)(x - x_q) + f_y(2)(y - y_q)$ mit $y_q = \pm 2$ erhalten wir die
Gleichungen der Tangenten: $t_1:\; 3x - 2y - 2 = 0$ und $t_2:\; 3x - 2y - 10 = 0$, t_1 und t_2 sind parallel.

Lösung 4

$z = f(x,\,y) = \int f_x(x,\,y)\,dx = x^3y + x^2y^2 + x^2 - xy + 3x + g(y) + C$
Bei der partiellen Ableitung nach x ist y als Konstante zu betrachten.

Lösung 5

$z_p = -16$, also $P(2,\,1,\,-16)$; $f_x(2,\,1) = 2$ und $f_y(x,\,y) = -8$
Ebenengleichung von $\tau:\; z = 2x - 8y - 12$

Lösung 6

grad$f = \nabla f$ ist ein Vektor mit n Komponenten, $n =$ Anzahl unabhängige Variablen

a)

$$\text{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\text{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \cdot \sin(u + 2x) + \frac{1}{x} \\ -z \cdot e^{yz} + \frac{1}{y} \\ -y \cdot e^{yz} + \frac{1}{z} \\ -3 \cdot \sin(u + 2x) \end{pmatrix}$$