MAE1 Serie 2 (Logik)

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils den Wahrheitswert:

a) Die Summe der vier kleinsten Primzahlen ist eine Primzahl.

b) Zwischen 90 und 120 liegen genau 7 Primzahlen.

c) 1001 ist nicht durch 7 teilbar.

d) Das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ ist durch 32 teilbar.

Aufgabe 2

Welche der Aussagen B, C oder D stellen Verneinungen der Aussage A dar?

A: Hans ist grösser als 180 cm.

B: Hans ist kleiner als 180 cm.

C: Hans ist nicht grösser als 180 cm.

D: Hans ist höchstens 180 cm gross.

Aufgabe 3

Wahr oder falsch?

a) $(24 \leq 42) \wedge (42 < 20)$,

b) $(0.97 < 0.98) \vee (0,98 > 0.99)$.

Aufgabe 4

Seien P, Q und R die folgenden Aussagen:

P: Ich habe Durst.

Q: Mein Glas ist leer.

R: Es ist drei Uhr.

Schreiben Sie unter Verwendung von P, Q und R die folgenden Aussagen als logische Verknüpfungen:

a) Es ist drei Uhr, und ich habe Durst.

b) Wenn es drei Uhr ist, habe ich Durst.

c) Wenn ich Durst habe, dann ist mein Glas leer.

d) Wenn ich keinen Durst habe, dann ist mein Glas nicht leer.

e) Entweder ich habe Durst oder mein Glas ist leer (jedoch nicht beides).

Aufgabe 5

Welche der folgenden Aussagenverknüpfungen sind Tautologien, welche sind Kontradiktionen?

a) $\neg(P \wedge (\neg P))$ b) $(P \wedge Q) \wedge (\neg(P \vee Q))$ c) $\neg(P \wedge (\neg P \vee Q)) \vee Q$

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass folgende Äquivalenzen gelten:

a) $\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$,

b) $\neg(\neg P \vee Q) \vee R \iff (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$,

c) $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$,

d) $P \wedge (Q \wedge R) \iff (P \wedge Q) \wedge R$,

e) $P \vee (Q \vee R) \iff (P \vee Q) \vee R$.

Aufgabe 7

Welche der folgenden Zeichenreihen sind Aussagen, welche sind Aussageformen, und welches ist der zugehörige Wahrheitswert, falls eine Aussage vorliegt?

a) $4 - 8 < 1$,

b) $6x + 1 = 0$,

c) $\sqrt{36 - x^2} < 4$,

d) $(2a + 3b)\,c$.

Aufgabe 8

Negieren Sie die Aussage $\forall x\, \exists y : A(x, y)$, und bringen Sie das Negationssymbol auf die rechte Seite der Quantoren. Verifizieren Sie die Aussage und deren Negation anhand umgangssprachlicher Beispiele.

Aufgabe 9 *Lügen*

Jemand behauptet, er hätte in seinem Leben noch keine dreimal gelogen. Die wievielte Lüge ist das mindestens, wenn dies eine Lüge ist?

Lösung 1

a) $2+3+5+7=17$, die Aussage ist wahr

b) Sieb von Eratosthenes: zwischen 90 und 120 sind die Primzahlen: $97, 101, 103, 107, 109, 113$, die Ausage ist also falsch.

c) $1001 = 7 \cdot 143$, die Aussage ist also falsch.

d) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 7!$ und $32 = 2^5$, d.h. $7!$ ist nicht durch 32 teilbar, d.h. auch diese Aussage ist falsch.

Lösung 2

Die Aussagen C und D.

Lösung 3

Die Aussage in a) ist falsch und diejenige in b) ist wahr.

Lösung 4

a) $P \wedge R$

b) $R \Longrightarrow P$

c) $P \Longrightarrow Q$

d) $\neg P \Longrightarrow \neg Q$

e) $(P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge Q))$

Lösung 5

Die Aussagen in a) und c) sind Tautologien, d.h. immer wahr, die Aussage in b) ist eine Kontradiktion, d.h. immer falsch.
Mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, wobei 0 für falsch und 1 für wahr steht.

a)

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$	$\neg(P \wedge (\neg P))$
0	1	0	1
1	0	0	1

b)

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$(P \wedge Q) \wedge (\neg(P \vee Q))$
0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

c) analog

Lösung 6

Mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, wobei 0 für falsch und 1 für wahr steht.
Exemplarisch wird b) gezeigt:
linke Seite der Gleichung:

P	Q	R	$\neg P \vee Q$	$\neg(\neg P \vee Q)$	$\neg(\neg P \vee Q) \vee R$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1

rechte Seite der Gleichung:

P	Q	R	$P \vee R$	$\neg Q \vee R$	$(P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Lösung 7

a) ist eine wahre Aussage

b) ist eine Aussageform

c) iste eine Aussageform

d) weder noch, ist ein Term.

Lösung 8

$$\neg(\forall x\, \exists y \colon A(x,y)) = \exists x \forall y \colon \neg A(x,y)$$

Beispiel: $\forall x\, \exists y \colon A(x,y)$: für alle x gibt es ein y so, dass $x \cdot y = 1$
und die Neagtion davon: $\exists x \forall y \colon \neg A(x,y)$: es gibt ein x so, dass für alle y gilt: $x \cdot y \neq 1$.

Lösung 9

Es ist mindestens die vierte Lüge.