MAE1 Serie 8 (Beträge, Summen, Reihen)

Aufgabe 1

Schreiben Sie die gegebenen Ungleichungen mit Hilfe von Fallunterscheidungen *ohne* Beträge.
Stellen Sie anschliessend die entsprechenden Gebiete graphisch dar.

a) $|x| - |y| > 2$

b) $|x + 1| - |2y - 1| \geq 1$

Aufgabe 2

$[x]$:= grösste ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.
[.] heisst *Gauss-Klammer*

a) $[\pi] = \ldots$, $[15] = \ldots$, $[-\frac{15}{2}] = \ldots$, $[-3.2] = \ldots$, $[\sqrt{2}] = \ldots$

b) Stellen Sie die Funktion $f(x) = [x]$ für $\mathbb{D}(f) = [-2, 4)$ graphisch dar.

c) Wertebereich $W(f) =$?

d) Stellen Sie die Funktion $g(x) = x - [x]$ für $x \in [-3, 4]$ graphisch dar, was für Eigenschaften hat die Funktion g ? $\mathbb{W}(g) =$?

Aufgabe 3

Vereinfachen Sie

$$s = (x-1) \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{11} (k+1)x^k - \sum_{k=1}^{11} k \cdot x^k \right\}$$

Aufgabe 4

$$\text{Gegeben: } \sum_{j=1}^{11} y_j = 10 \quad \text{und} \quad \left\{ \sum_{j=1}^{11} (x_j + y_j) \right\}^2 = 289 \qquad \text{Gesucht: } \sum_{j=1}^{11} x_j = ?$$

Zudem ist bekannt, dass auch die Summe über die x_j postiv ist.

Aufgabe 5

$x = 12.34\overline{567}$. Stellen Sie x mit Hilfe einer geometrischen Reihe als gewöhnlichen Bruch dar.

Aufgabe 6

Die Reihe einer konvergenten geometrischen Folge mit lauter positiven Gliedern ist 1, die Reihe der Quadratwurzeln ihrer Glieder dagegen 2. Bestimmen Sie das Anfangsglied a_1 und den Quotienten q.

Aufgabe 7

Einer geraden quadratischen Pyramide (Grundkante: $1cm$, Höhe: $2cm$) wird ein Würfel eingeschrieben, der auf der Grundfläche der Pyramide aufliegt; mit der oberhalb des Würfels entstehenden Restpyramide wird ebenso verfahren, etc... Wieviel $\%$ des Pyramidenvolumens macht das Volumen aller dieser Würfel aus?

Aufgabe 8

Wie gross muss n in der $n-$ten Teilsumme s_n sein, damit sich s_n um weniger als $\varepsilon = 1$ Millionstel von der Reihe s unterscheidet?

a) $s = 1 + 0.9 + (0.9)^2 + \cdots$

b) $s = 1 + 0.1 + (0.1)^2 + \cdots$

Aufgabe 9

a) Vom wievielten Glied an sind die Glieder der geometrischen Folge $40, 30, 22.5, \ldots$ kleiner als $\varepsilon = 10^{-4}$?

b) Wie gross ist die geometrische Reihe?

c) Bis zum wievielten Glied muss summiert werden, wenn man die 90% der geometrischen Reihe erhalten will?

MAE1 Lösungen Serie 8

Lösung 1

für a) und b): Fallunterscheidungen, pro Betrag zwei Fälle, insgesamt 4 Fälle.

a) 1. Fall: $x \geq 0$, also $\begin{cases} \text{a)} & y \geq 0\colon \quad x - y > 2 \\ \text{b)} & y < 0\colon \quad x + y > 2 \end{cases}$

2. Fall: $x < 0$, also $\begin{cases} \text{a)} & y \geq 0\colon \quad -x - y > 2 \\ \text{b)} & y < 0\colon \quad -x + y > 2 \end{cases}$

b) 1. Fall: $x + 1 \geq 0$, $x \geq -1$, also $\begin{cases} \text{a)} & 2y - 1 \geq 0,\ y \geq \frac{1}{2}\colon \quad x - 2y + 1 \geq 0 \\ \text{b)} & 2y - 1 < 0,\ y < \frac{1}{2}\colon \quad x + 2y - 1 \geq 0 \end{cases}$

2. Fall: $x + 1 < 0$, $x < -1$, also $\begin{cases} \text{a)} & 2y - 1 \geq 0,\ y \geq \frac{1}{2}\colon \quad -x - 2y - 1 \geq 0 \\ \text{b)} & 2y - 1 < 0,\ y < \frac{1}{2}\colon \quad -x + 2y - 3 \geq 0 \end{cases}$

Lösung 2

a) $3,\ 15,\ -8,\ -4,\ 1$

b) Treppe, die bei -2 beginnt und bei 3 aufhört, Stufenhöhe und -länge ist gleich 1, (der linke Rand gehört jeweils dazu, ohne rechten Rand).

c) $\mathbb{W}(f) = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

d) g ist periodisch, Periodenlänge $p = 1$, ($1-$ periodisch), $W(g) = [0, 1)$

Lösung 3

$s = x^{12} - 1$

Lösung 4

$289 = 17 \cdot 17$ und damit: $\sum_{j=1}^{11} x_j = 7$

Lösung 5

$$\begin{aligned} x &= 12.34 + 10^{-2} \cdot 0.567 \left(1 + 10^{-3} + 10^{-6} + \ldots\right) \\ &= 12.34 + 10^{-2} \cdot 0.567 \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-3k} \\ &= 12.34 + 10^{-2} \cdot 0.567 \cdot \tfrac{1}{1-10^{-3}} \\ &= 12 + \tfrac{34}{100} + \tfrac{567}{99900} \end{aligned}$$

Lösung 6

$s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 1$ und $s_{\surd} = \sqrt{a_1} \cdot \frac{1}{1-\sqrt{q}} = 2 \Longrightarrow a_1 = 1 - q$ und $\sqrt{a_1} = 2 \cdot (1 - \sqrt{q})$
Elimination von a_1: $5q - 8\sqrt{q} + 3 = 0 \Longrightarrow \sqrt{q} = \frac{3}{5}$
und schliesslich $a_1 = \frac{16}{25}$ und $q = \frac{9}{25}$.

Lösung 7

Das Volumen der Pyramide ist $V_{\text{Pyr}} = \frac{2}{3}\text{cm}^3$
Die Würfel bilden eine geometrische Folge, die erste Würfelkante hat Länge $x_1 = \frac{2}{3}$cm
die zweite Würfelkante hat Länge $x_2 = \frac{4}{9}\text{cm} = x_1 \cdot \frac{2}{3}$, die dritte Würfelkante hat Länge
$x_3 = \frac{8}{27}\text{cm} = x_2 \cdot \frac{2}{3} = x_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$, usw.
Volumen des ersten Würfels $V_1 = x_1^3$, Volumen des zweiten Würfels $V_2 = x_2^3 = V_1 \cdot \frac{8}{27}$, Volumen des dritten Würfels $V_3 = x_3^3 = V_2 \cdot \frac{8}{27} = V_1 \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^2$
Volmen aller Würfel $V = \sum_{k=1}^{\infty} V_k = V_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8}{27}\right)^k = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{1-\frac{8}{27}} = \frac{8}{19}\text{cm}^3$
relativer Anteil am Gesamtvolumen: $\frac{12}{19} \equiv 63.16\%$

Lösung 8

$|s_n - s| = \left|\frac{1}{1-q} \cdot q^n\right| < 10^{-6}$

a) $n > \frac{-7}{\log(0.9)} = 152.98$, also $n = 153$, d.h. die Konvergenz ist sehr langsam, $q = 0.9$

b) $n > 7 - \log(9) = 6.05$, also $n = 7$, d.h. die Konvergenz ist sehr rasch, $q = 0.1$.

Lösung 9

a) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $a_1 = 40$ und $q = \frac{3}{4} \Longrightarrow n > 1 + \frac{-\log(4)-5}{\log\left(\frac{3}{4}\right)} = 45.84$, also $n = 46$

b) $a_1 = 40$ und $q = \frac{3}{4}$, somit $s = 160$

c) $q^n = \frac{1}{10}$, also $n = -\frac{1}{\log\left(\frac{3}{4}\right)} = 8.0039$, d.h. bis zum neunten Glied der Folge.