MAE1 Serie 9 (Grenzwerte von Funktionen, Polynome)

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^5+1}{x+1}$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-5x+3}{7x^2+1}$, d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x+1}{x-1}$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-3}{x^2+2x-3}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$, für $h(x) = \begin{cases} 2x-3 & (x<0) \\ 2x+5 & (x>0) \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{30}{5+4e^{-2x}}$, d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$, e) $\lim\limits_{x\to \infty} \left\{ \left(\dfrac{5x^3-4x^4}{x^2+8x^4+5x^3} \right)^3 - \dfrac{5x-2}{-2x+5} \right\}$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{h\to 0} f(h)$ der folgenden Funktionen (x_0 sei jeweils eine beliebige, aber konstante Zahl):

a) $f(h) = \dfrac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$, b) $f(h) = \dfrac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h}$, c) $f(h) = \dfrac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h}$.

Aufgabe 4

Zerlegen Sie das Polynom $p_4(x) = x^4 - x^2 + 4$ in zwei Faktoren. Verwenden Sie dazu den Ansatz $p_4(x) = (x^2+ax+b)\cdot(x^2+cx+d)$. Zeigen Sie, dass diese Faktoren nicht weiter zerlegbar sind, vgl. PBZ der Theorie.

Aufgabe 5

a) Gegeben ist ein Polynom $2-$ ten Grades: $p_2(x) = 4x^2 - 15x + c$. Die eine Nullstelle soll um 3 grösser sein als die andere. Bestimmen Sie die Nullstellen und c.

b) Gegeben ist ein Polynom $3-$ ten Grades: $p_3(x) = 2x^3 - 5x^2 + cx + 9$.
$p_3(x)$ hat 2 Nullstellen mit der Summe 4. Bestimmen Sie die Nullstellen und c.

Aufgabe 6

a) Gegeben ist ein Polynom $4-$ ten Grades: $p_4(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

- teilen Sie $p_4(x)$ durch den Linearfaktor $(x - 1)$
- teilen Sie das Quotientenpolynom $q_3(x)$ wieder durch den Linearfaktor $(x - 1)$
- teilen Sie das Quotientenpolynom $q_2(x)$ wieder durch den Linearfaktor $(x - 1)$
- usw.

Sie haben jetzt das Polynom $p_4(x)$ an der Stelle $x = 1$ entwickelt.

b) Entwickeln Sie das Polynom $p_4(x) = 2x^4 - 19x^3 + 59x^2 - 54x - 16$ an der Stelle $x = 3$.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie, falls möglich, sämtliche Nullstellen der folgenden Polynome

a) $p_3(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

b) $p_5(x) = x^5 - 2x^4 - 33x^3 + 38x^2 + 116x - 120$

c) $p_4(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

und geben Sie die gegebenen Polynome in faktorisierter Form an.

MAE1 Lösungen Serie 9

Lösung 1

a) 5, nach Divison mit $(x+1)$, Hornerschema, $p_5(x) = (x+1)\cdot(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

b) 0

c) $\frac{1}{7}$, in Zähler und Nenner x^2 ausklammern und vor der Grenzwertbildung kürzen

d) $\frac{3}{2}$

Lösung 2

a) $\frac{3}{4}$, da der Nenner $= (x-1)\cdot(x+3)$, kürzen vor der Grenzwertbildung

b) Grenzwert existiert nicht, da $\lim\limits_{x\uparrow 0} = -3$ und $\lim\limits_{x\downarrow 0} = 5$.

c) 6, da $e^{-2x} \longrightarrow 0$ für $x \longrightarrow \infty$

d) 2, da $1 - x = (1+\sqrt{x})\cdot(1-\sqrt{x})$, kürzen vor der Grenzwertbildung

e) $\frac{19}{8}$, Differenz und Limes dürfen vertauscht werden, beim ersten Summanden mit x^3 und beim zweiten mit x kürzen, anschliessend Grenzwertbildung.

Lösung 3

a) $2\cdot x_0$

b) $3\cdot x_0^2$

c) $n\cdot x_0^{n-1}$

Lösung 4

Ansatz einsetzen und anschliessend Koeffizientenvergleich, was ein Gleichungssystem für die gesuchten Parameter liefert:

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x^4\colon & 1 & = & 1 \\ x^3\colon & 0 & = & a+c \\ x^2\colon & -1 & = & b+d+ac \\ x^1\colon & 0 & = & ad+bc \\ x^0\colon & 4 & = & bd \end{array}\right.$$

hier ist das Glgsyst nicht–linear!
Lösung:

$$a = \pm\sqrt{5} \qquad b = 2 \qquad c = \mp\sqrt{5} \qquad d = 2$$

also

$$p_4(x) = x^4 - x^2 + 4 = (x^2 \pm \sqrt{5}x + 2)\cdot(x^2 \mp \sqrt{5}x + 2)$$

Die beiden quadratischen Polynome haben keine reellen NS, also kann das Polynom $p_4(x)$ nicht weiter faktorisiert werden.

Lösung 5

a) $x_1 = x_2 + 3$, was $c = \frac{81}{16}$ liefert und damit $x_1 = \frac{27}{8}$ und $x_2 = \frac{3}{8}$.

b) mit Hilfe des Satzes von Vïeta:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 & = & -\frac{9}{2} \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & \frac{5}{2} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 & = & \frac{c}{2} \end{array} \right.$$

aus der zweiten Gleichung folgt sofort: $x_3 = -\frac{3}{2}$, da $x_1 + x_2 = 4$, damit die weiteren NS $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ und schliesslich $c = -6$.

Lösung 6

a) mit dem Hornerschema, (viermalige Division)

$$\begin{array}{rcll} p_4(x) & = & (x-1) \cdot q_3(x) + r_1 & \\ q_3(x) & = & (x-1) \cdot q_2(x) + r_2 & \\ q_2(x) & = & (x-1) \cdot q_1(x) + r_3 & \\ q_1(x) & = & (x-1) \cdot q_0(x) + r_4 & \qquad q_0(x) = \text{konstant} \end{array}$$

rückwärts einsetzen liefert:

$$p_4(x) = q_0(x) \cdot (x-1)^4 + r_4 \cdot (x-1)^3 + r_3 \cdot (x-1)^2 + r_2 \cdot (x-1) + r_1$$

$$p_4(x) = 5 \cdot (x-1)^4 + 16 \cdot (x-1)^3 + 21 \cdot (x-1)^2 + 12 \cdot (x-1) + 3$$

b) analog für den Faktor $(x-3)$:

$$p_4(x) = 2 \cdot (x-3)^4 + 5 \cdot (x-3)^3 + 3 \cdot (x-3)^2 + 24 \cdot (x-3) + 2$$

Lösung 7

Mit Hilfe des Hornerschemas:

a) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ und $x_3 = -4$, also: $p_3(x) = (x+2)(x-3)(x+4)$

b) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 6$ und $x_5 = -5$, also $p_5(x) = (x-1)(x-2)(x+2)(x-6)(x+5)$

c) $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 2$ und $x_4 = -2$, also $p_4(x) = (x-1)^2(x-2)(x+2)$