MAE2 Serie 2 (Repetition)

Aufgabe 1

a) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}}$$

Wählen Sie einen Definitionsbereich $\mathbb{D}$, sodass die Funktion f auf $\mathbb{D}$ umkehrbar ist. Bestimmen Sie den zugehörigen Wertebereich $\mathbb{W}$ und die Umkehrfunktion f^{-1} mit Definitions- und Wertebereich.

b) Ist die Funktion $y = f(x) = |\sin(x)|$ stetig? (graphische Darstellung)

Aufgabe 2

a) Wie muss die Zahl $k \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Gleichung (1) erfüllt ist?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{10}(5^n) + k^2}{\log_{10}(9 \cdot k^n) + k} = \frac{1}{3} \tag{1}$$

b) Welchen Wert hat das erste Glied a_1 einer geometrischen Folge, deren Quotient $q = 0.6$ ist und deren Reihe den Wert 15 hat?

Aufgabe 3

- Gegeben ist eine Parabel $y = p_2(x) = x^2 + 2x - 3$ und ein Punkt $P(1, -1)$.
- Gesucht sind die Tangenten durch P an die Parabel sowie ihre Berührungspunkte.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle Null- und Polstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, Symmetrie sowie das asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$ der Funktion

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 4}$$

und skizzieren Sie den Graphen.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren, oder begründen Sie, warum sie nicht existieren:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left((-1)^{2n+1}+1\right)\cdot\frac{1}{n^2}\right\}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{-2n+4+\frac{6n^2+23n+5}{3n+1}\right\}$$

Aufgabe 6

Von einem Quadrat der Seitenlänge $a > 0$ werden quadratische Eckstücke abgeschnitten und anschliessend eine Schachtel gefaltet (siehe Skizze). Wie gross muss die Seitenlänge der abgeschnittenen Stücke sein, damit die Schachtel ein maximales Volumen erhält? Wie gross wird das maximale Volumen?

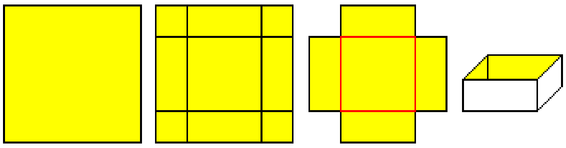

Abbildung 1: Schachtel

Lösung 1

a) $-x^2 + 6x - 8 \geq 0 \iff x^2 - 6x + 8 \leq 0$
Es sind zwei Intervalle möglich:

- $\mathbb{D}(f) = (2, 3]$, $\mathbb{W}(f) = [1, \infty) \implies f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$, mit $\mathbb{D}(f^{-1}) = [1, \infty)$, $\mathbb{W}(f^{-1}) = (2, 3]$.
- $\mathbb{D}(f) = [3, 4)$, $\mathbb{W}(f) = [1, \infty) \implies f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$, mit $\mathbb{D}(f^{-1}) = [1, \infty)$, $\mathbb{W}(f^{-1}) = [3, 4)$.

b) In den Nullstellen $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ haben wir Spitzen und es gilt: $\lim\limits_{x \uparrow k\pi} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow k\pi} f(x) = 0$.
Ja, die Kurve kann ohne abzusetzen, gezeichnet werden.

Lösung 2

a) $k = 5^3$, Logarithmengesetze und algebraische Umformung.

b) $a_1 = 6$

Lösung 3

Berührungspunkt $B(u, f(u))$
Gleichung der Tangente t durch $P(1, -1)$ und B:

$$t\colon y - f(u) = f'(u) \cdot (x - u) \quad P \in t \quad \implies \quad -1 - f(u) = f'(u) \cdot (1 - u)$$

und daraus: $u(u - 2) = 0$, also

$$\begin{aligned} B_1(0, -3)\colon t_1 \quad y = &\quad 2 \cdot (x - 1) - 1 \\ B_2(2, 5)\colon t_2 \quad y = &\quad 6 \cdot (x - 1) - 1 \end{aligned}$$

Lösung 4

$f(x)$ ist gerade, d.h. die Kurve $y = f(x)$ ist symmetrisch bzgl. der $y-$ Achse.
$\mathbb{D}(f) = \mathbb{R} \backslash \{-2, +2\}$, NS: $x_{1.2} = \pm 1$, Schnittpunkt der Kurve mit der $y-$ Achse: $\left(0, \frac{1}{4}\right)$
asymptotisches Verhalten (Polynom–Division):

$$y = x^2 + 4 \qquad \text{da} \quad (x^4 - 1) : (x^2 - 4) = x^2 + 4 + \frac{15}{x^2 - 4}$$

horizontale Tangenten:

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 4) - (x^4 - 1)2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x \cdot (x^4 - 8x^2 + 1)}{(x^2 - 4)^2} \overset{!}{=} 0$$

und daraus: $x_1 = 0$, mit $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ = lokales Maximum
$x_{2.3} = \pm\sqrt{4 + \sqrt{15}}$ mit $(\pm\sqrt{4 + \sqrt{15}}, 2\sqrt{15} + 8)$ = lokale Minima und
schliesslich: $\mathbb{W}(f) = (-\infty, \frac{1}{4}] \cup [2\sqrt{15} + 8, \infty)$

Lösung 5

a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 11$$

gemeinamer Nenner $(3n+1)$ und algebraisch vereinfachen.

Lösung 6

Volumen $V = V(x)$, wobei $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$

$$V(x) = x \cdot (a-2x)^2 \stackrel{!}{=} \text{max} \qquad V(0) = V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$V'(x) = (a-2x)\cdot(a-6x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{a}{2} \quad x_2 = \frac{a}{6}$$

und damit:

$$V\left(\frac{a}{6}\right) = V_{\text{max}} = \frac{4a^3}{36}$$