MAE2 Serie 5 (unbestimmte Integrale)

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale

a) $I_a = \int (3x^2 - 7)\,dx$ b) $I_b = \int (3x^2 - 7)^2\,dx$ c) $I_c = \int \left(\frac{a}{x^3} + \frac{b}{x^2}\right)\,dx$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie je die Menge der Stammfunktionen der gegebenen Funktion f

a) $f_a(x) = \sin(bx)$ b) $f_b(x) = a \cdot \cos(bx)$ c) $f_c(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int (3t^2 - 4t + 7)dt$ b) $\int (x^3 + x^{\frac{8}{7}})dx$ c) $\int \left(x^2 - \frac{1}{8\sqrt{x}} - \frac{4}{5}x^{-\frac{2}{5}}\right) dx$

Aufgabe 4

Ebenso:

a) $\int (3x+2)^2 dx$ b) $\int 8e^{-2x} dx$ c) $\int \left(\frac{1000}{x} + \frac{25}{x^2}\right) dx$

Aufgabe 5

Ebenso:

a) $\int \frac{x^2 - 1}{x + 1} dx$ b) $\int \frac{(t+3)^2}{\sqrt{t}} dt$ c) $\int b \cdot e^{ax} dx$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie f so, dass gilt:

a) $f'(x) = x - 3$ und $f(2) = 9$.

b) $f'(x) = x^2 + 1$ und $f(0) = 8$.

Aufgabe 7

Die jährliche Änderungsrate $\dot{D}(t)$ der staatlichen Kreditmarktschulden $D(t)$ (in Mia. Dollar) kann durch die Funktion

$$\dot{D}(t) = -71.3t^3 + 597t^2 - 1190t + 1975$$

modelliert werden, wobei t die Anzahl Jahre seit 1994 ist. Bestimmen Sie $D(t)$, wenn bekannt ist, dass im Jahr 1994 die Schulden 17.198 Mia. Dollar betrugen. Wie hoch waren die staatlichen Kreditmarktschulden im Jahr 2000?

Aufgabe 8

Eine Firma ermittelt, dass die Änderungsrate $D'(p)$ der Konsumentennachfrage $D(p)$ bezüglich des Preises p pro Einheit des verkauften Produkts durch

$$D'(p) = -\frac{4000}{p^2}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie die Nachfragefunktion $D(p)$, falls bekannt ist, dass bei einem Preis von CHF 4.- pro Einheit 1003 Einheiten nachgefragt werden.

Aufgabe 9

Ein frei fallendes Objekt hat die Beschleunigung $a(t) = -9.81m/s^2$. Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v(0) = v_0$, und die Anfangshöhe sei $s(0) = s_0$.
Bestimmen Sie die Höhe $s(t)$ in Abhängigkeit der Zeit t.

Aufgabe 10

Prüfen Sie nach, ob folgende Gleichungen richtig sind:

a) $$\int \frac{7}{\sqrt{x^9}}\,dx = -\frac{2}{x^3\sqrt{x}} + C$$

b) $$\int \frac{6x}{(2-x^2)^2}\,dx = \frac{2x^2-1}{2-x^2} + C$$

MAE2 Lösungen Serie 5

Lösung 1

a) $I_a = x^3 - 7x + C$

b) $I_b = 9\frac{x^5}{5} - 14x^3 + 49x + C$

c) $I_c = -\frac{a}{2x^2} - \frac{b}{x} + C$

Lösung 2

a) $F_a(x) = \left(-\frac{1}{b}\right)\cos(bx) + C$

b) $F_b(x) = \frac{a}{b}\sin(bx) + C$

c) $F_c(x) = \left(-\frac{1}{3}\right)\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + C$

Lösung 3

a) $t^3 - 2t^2 + 7t + C$

b) $\frac{x^4}{4} + \frac{7}{15}x^{\frac{15}{7}} + C$

c) $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{x} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{5}} + C$

Lösung 4

a) $\frac{1}{9}(3x+2)^3 + C$

b) $(-4)\cdot e^{-2x} + C$

c) $1000 \cdot \ln|x| - \frac{25}{x} + C$

Lösung 5

a) $\frac{x^2}{2} - x + C$

b) $\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + 4t^{\frac{3}{2}} + 18\sqrt{t} + C$

c) $\frac{b}{a}\cdot e^{ax} + C$

Lösung 6

a) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 13$

b) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x + 8$

Lösung 7

$$D(t) = -17.825t^4 + 199t^3 - 595t^2 + 1975t + C$$

$D(0) = 17.198 \Longrightarrow C = 17.198$, also

$$D(t) = -17.825t^4 + 199t^3 - 595t^2 + 1975t + 17.198$$

Schulden im Jahr 2000 ($t = 6$): $D(6) = 10'329.998$ in Mia Dollar, 1 Mia $= 10^9 = 1000$ Mio

Lösung 8

$$D(p) = \frac{4000}{p} + C \qquad D(4) = 1003 \quad \Longrightarrow \quad D(p) = \frac{4000}{p} + 3$$

Lösung 9

$[a] = \frac{m}{s^2}$, $[v_0] = \frac{m}{2}$, $[s_0] = m$ und $[t] = s$

$$v(t) = a \cdot t + C \qquad \Longrightarrow \qquad v(t) = a \cdot t + v_0 \qquad [v(t)] = \frac{m}{s}$$

$$s(t) = v(t) \cdot t + C \qquad \Longrightarrow \qquad s(t) = a \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + s_0 \qquad [s(t)] = m$$

Lösung 10

Durch Ableitung der rechten Seite:

a) $(-2 \cdot x^{-\frac{7}{2}})' = 7 \cdot x^{-\frac{9}{2}}$ b) $\left(\frac{2x^2 - 1}{2 - x^2}\right)' = \frac{6x}{(2 - x^2)^2}$