MLAN1 Geometrie
Serie 12

Aufgabe 1

Lösen Sie $\sin(x) = \frac{1}{2}$ für $x \in [-\pi, 3\pi]$, *exakte* Angaben.

Aufgabe 2

Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a)

$$\frac{2}{\sqrt{\tan^2(\alpha) + \cot^2(\alpha) + 2}}$$

b)

$$\frac{3 - \sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} - \frac{2}{1 + \cos(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha) + 1}{\cos(\alpha) - 1}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie je die drei Funktionswerte der übrigen Winkelfunktionen (Resultate *exakt*):

a) $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ b) $\cos(\alpha) = \frac{1}{4}$ c) $\cot(\alpha) = \sqrt{10}$ d) $\sin(\alpha) = \frac{5}{4}$

Aufgabe 4

Schnittwinkel zweier Ebenen:
Gegeben: $E_1 : x + 2y + 2z = 7$ und $E_2 : 3x + 3y = -20$.
Gesucht: Schnittwinkel φ dieser beiden Ebenen, ($\varphi < \frac{\pi}{2}$)

Aufgabe 5

Ein Lichtstrahl s aus der Lichtquelle $Q(1, 2, 3)$ mit der Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ wird an der Ebene $E: \ 2x + y + z = 1$ reflektiert.
Gesucht ist eine Parameterdarstellung des reflektierten Lichtstrahls s'.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten $A(1, 0, 1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(-1, 1, 2)$ und $D(0, 0, 3)$. (*exakte* Angaben)

Aufgabe 7

Gesucht ist der kürzeste Abstand zweier windschiefer Geraden $g = g(A, B)$ und $h = h(C, D)$, wobei die Punkte wie folgt gegeben sind: $A(1, 0, 1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(-1, 1, 2)$ und $D(0, 0, 3)$.

Aufgabe 8

Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Hypothenusenabschnitte $q = (3cm)$ und $p = (9cm)$ gegeben. Konstruieren Sie dieses Dreieck und bestimmen Sie $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ und $\cot(\alpha)$.
Dabei ist $q =$ Strecke von A bis zum Höhenfusspunkt der Höhe h_c.
(*exakte* Resultate)

MLAN1 Geometrie
Lösungen Serie 12

Lösung 1

$x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \right\}$

Lösung 2

a) $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = sin(2\alpha)$, falls $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

b) $-\frac{1}{\sin^2(\alpha)}$

Lösung 3

Die Lösungen sind eindeutig, da $\alpha < \frac{\pi}{2}$ sein soll.

a) $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$, $\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ und $\cot(\alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\tan(\alpha) = \sqrt{15}$ und $\cot(\alpha) = \frac{\sqrt{15}}{15}$

c) $\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{11}}{11}$, und $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{110}}{11}$

d) keine Lösung, da $\sin(\alpha) > 1$

Lösung 4

Mit dem Skalarprodukt der beiden Normalvektoren:
$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$, also $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Lösung 5

$P = s \cap E : P(-3, 0, 7)$
$l =$ Lot durch Q zu E mit Lotfusspunkt $L = l \cap E : L(-1, 1, 2)$.
$Q' = (-3, 0, 1) =$ an E gespiegelter Punkt Q.
$s' = s'(Q', P) : \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung 6

Ebene $E = E(A, B, C) : y - z + 1 = 0$, zweit–projizierend. Lot l durch D zu E und $F = l \cap E : F(0, -1, 1)$
Volumen gleich Grundfläche mal Höhe durch drei: $V = G \cdot \frac{h}{3}$, wobei $h = |\overrightarrow{FD}| = \sqrt{2}$
und $G = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \sin(\varphi)$, wobei $\varphi = \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Mit dem Skalarprodukt erhalten wir $\cos(\varphi) = -\frac{4}{3\sqrt{2}}$ und daraus $\sin(\varphi) = \frac{1}{3}$, also $G = \frac{1}{6}\, 3\sqrt{2}$ und schliesslich $V = \frac{1}{3}$.

Lösung 7

Gesucht ist eine Transversale t, die sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht. Richtungsvektor von t : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $P = E(g, \vec{a}) \cap h : P\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)$. Transversale t duch P geschnitten mit g liefert den Punkt $Q\left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right)$ und schliesslich $d = |\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lösung 8

Konstruktion mit Hilfe des Höhensatzes.
Katheten: $a = 6\sqrt{3}\,cm$ und $b = 6\,cm$ und Hypothenuse $c = 12\,cm$, also $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$, $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$ und $\cot(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$