MLAN1 Matrizen
Serie 4

Aufgabe 1

Gegeben: $a_1 = 4,\ \ a_7 = 11,\ \ \sum\limits_{i=1}^{7} b_i = 16,\ \ \sum\limits_{i=1}^{7} b_i^2 = 44$

Gesucht:

$$\text{a) } s_a = \left(\sum_{i=1}^{7} (b_i - 3)^2\right)^2 \qquad \text{b) } s_b = \sum_{i=2}^{7} (a_i + b_i - 3) - \sum_{k=3}^{8} (a_{k-2} + 4)\ + b_1$$

Aufgabe 2

Gegeben:

$$\sum_{i=1}^{8} (2x_i - 3) = 26 \qquad \sum_{k=1}^{8} (x_k - 4)^2 = 12 \qquad \sum_{i=1}^{8} 5x_i^3 = 55$$

Gesucht:

$$\text{a) } s_a = \left(\sum_{j=1}^{8} (2x_j - 5)^2\right)^2 - \left(2\sum_{i=1}^{8} x_i\ - 3\right) \qquad \text{b) } s_b = \left\{\sum_{i=1}^{8}\left(\left(2x_i - 3\cdot\sum_{i=1}^{8} x_i\right) - \sum_{k=1}^{8} (2x_k - 4)^2\right)\right\}^2$$

Aufgabe 3

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$x^T = (0 \quad 2 \quad -3) \quad \text{und} \quad y^T = (1 \quad 3 \quad -2)$$

Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden *Matrixprodukte*:

$$AB \quad BA \quad Ax \quad A^2 \quad B^2 \quad y^T x \quad x\, y^T \quad B^T y \quad y^T B \quad yx$$

Aufgabe 4

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ und B eine 2×2-Matrix.
Bestimmen Sie B so, dass A und B *vertauschen*, d.h. dass

$$AB = BA$$

gilt. (*alle* Lösungen)

Aufgabe 5

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. A heisst *symmetrisch*, da $A^T = A$ erfüllt ist.

a) Bestimmen Sie eine 3×3 - Matrix X so, dass $AX = I_3$

b) Berechnen Sie anschliessend XA

Feststellung?

MLAN1 Matrizen
Lösungen Serie 4

Lösung 1

a) $s_a = 11^2 = 121$

b) $s_b = a_7 - a_1 + \sum_{i=1}^{7} b_i - 3 \cdot 6 - 4 \cdot 6 = -19$

Lösung 2

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{8} x_k = 25, \ \sum_{k=1}^{8} x_k^2 = 84 \qquad s_a = 36^2 - (2 \cdot 25 - 3) = 1249$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^{8} (2x_i - 3 \cdot 25 - 4 \cdot 84 + 16 \cdot 25 - 16 \cdot 8) \quad s_b = (-1062)^2 = 1127844$$

Lösung 3

$$AB = \begin{pmatrix} 23 & 26 \\ 31 & 36 \\ -6 & -8 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -19 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \\ -2 & -3 & -10 \end{pmatrix} \quad Ax = \begin{pmatrix} -21 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \quad B^T y = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$y^T B = (4 \quad 6) \quad xy^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ -3 & -9 & 6 \end{pmatrix} \quad y^T x = 12$$

nicht definiert sind die folgenden Produkte: $BA \quad B^2 \quad yx$

Lösung 4

$B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\, b + d & b \\ -\frac{3}{2}\, b & d \end{pmatrix}$ $\quad b, d \in \mathbb{R}$, d.h. 2 *freie* Parameter,
oder $B = \begin{pmatrix} d + c & -\frac{2}{3}\, c \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad c, d \in \mathbb{R}$, auch hier 2 *freie* Parameter.

Lösung 5

a) $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $XA = I_3 = AX$

Feststellung: A und X sind vertauschbar, oder sie kommutieren.