MLAN3
Serie 4

Aufgabe 1

Berechnen Sie mit der *Trapezwert-Methode* eine Näherung des Integrals

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2$$

mit einer Toleranz $\varepsilon = 10^{-3}$ für die Genauigkeit.
Wieviele Halbierungen brauchen Sie, um die gegebene Toleranz einzuhalten?

Aufgabe 2

Es gilt

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \tag{1}$$

Die Gleichung (1) ist *exakt*.
Die numerische Integration erlaubt hier eine approximative Berechnung der Zahl π.
Berechnen Sie π mit der *Trapezwert-Methode* (fortgesetzte Halbierung).

Aufgabe 3

Stellen Sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{rcl} |z|^4 - |z|^2 & \geq & 0 \\ |z+z^*| + |z-z^*| & \leq & 8 \end{array} \right.$$

in der Gauss'schen Ebene graphisch dar.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$\text{a)}\quad j\,|z| = z^* \qquad \text{b)}\quad j + Re\left(\frac{1}{z}\right) = z \qquad \text{c)}\quad \left|\frac{z-j}{z^*-j}\right| = 1$$

Aufgabe 5

Betrachten Sie die folgenden Mengen von reellen $n \times n-$ Matrizen:

$$\mathbb{M}_{sym} := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, A \text{ ist symmetrisch, d.h. } A = A^T \right\} \tag{2}$$

$$\mathbb{M}_{reg} := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, A \text{ ist regulär } \right\} \tag{3}$$

$$\mathbb{M}_{sp}(s) := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, spur(A) = s \right\}, \text{ mit } s \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Dabei ist die Spur einer quadratischen Matrix definiert als die Summe ihrer Diagonalelemente.
Welche dieser Mengen sind Vektorräume bezüglich der üblichen Addition und dem skalaren Vielfachen?

Aufgabe 6

Gegeben sind die beiden Vektoren $x = (2,\, 3,\, 1,\, -1,\, 1)^T$ und $y = (2,\, 1,\, -1,\, -1,\, 1)^T$ aus dem $\mathbb{R}^5$.
Bestimmen Sie $x \cdot y$, $\|x\|_2$, $\|y\|_2$, sowie den Winkel zwischen x und y.

Aufgabe 7

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Teilmengen $\mathbb{T}$ der Menge $\mathbb{S} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \subset \mathbb{R}^4$, die eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

Aufgabe 8

Beweisen Sie, dass eine durch den Ursprung gehende Gerade g im $\mathbb{R}^3$ mit den Standard – Operationen ein Vektorraum V ist.

Lösung 1

Es werden $k = 4$ Halbierungen gebraucht, da

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \Longrightarrow \quad M_2 = 2$$

und damit

$$n > 10 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} = 12.91 \quad \Longrightarrow \quad 2^3 = 8 < n = 13 < 2^4 = 16$$

$T = 0.69339120220753\ldots = \ln(2)$

Lösung 2

T_k	$h = \Delta x$
$T_0 = 4 \cdot 0.75$	1
$T_1 = 4 \cdot 0.775$	0.5
$T_2 = 4 \cdot 0.782794$	0.25
$T_3 = 4 \cdot 0.784749$	0.125
$T_4 = \ldots$	0.0625
$\ldots$	$\ldots$

Lösung 3

$$\left\{ \begin{array}{rcll} |z|^2 & \geq & 1 & \text{das Äussere des Einheitskreises} \\ 2\,|x| + 2\,|y| & \leq & 8 & \text{das Innere eines Quadrates mit den Ecken}(0, \pm 4), (\pm 4, 0) \end{array} \right.$$

Lösung 4

$$\text{a)} \quad x = 0 \wedge y \leq 0 \qquad \text{b)} \quad x = 0 \wedge y = 1 \qquad \text{c)} \quad x \in \mathbb{R} \wedge y = 0, \text{ d.h. } z \in \mathbb{R}$$

Lösung 5

- für (2): seien $A = A^T$ und $B = B^T$ zwei symmetrische Matrizen.
  Mit den Regeln über die Transposition folgt:
  $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$ und $(\mu A)^T = \mu A^T = \mu A$, d.h. $\mathbb{M}_{sym}$ ist ein VR.
- für (3): seien $A \cdot A^{-1} = I_n$ und $B \cdot B^{-1} = I_n$ zwei reguläre Matrizen.
  Frage: existiert $(A + B)^{-1}$?
  Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
  mit $A^{-1} = A$ und $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ aber $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist singulär!
  D.h. $\mathbb{M}_{reg}$ ist *kein* VR.

- für (4): seien A und B zwei Matrizen mit $spur(A) = s$ und $spur(B) = s$
  Mit den Rechenregeln über Matrizen erhalten wir:
  $spur(A+B) = spur(A) + spur(B) = 2s \neq s$ und $spur(\mu A) = \mu spur(A) = \mu s \neq s$,
  d.h. $\mathbb{M}_{sp}(s)$ ist *kein* VR.

Lösung 6

$x \cdot y = 8$, $\|x\|_2 = 4$, $\|y\|_2 = 2\sqrt{2}$, also $\cos(\sphericalangle(x,y)) = \frac{x \cdot y}{\|x\|_2 \cdot \|y\|_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \sphericalangle(x,y) = \frac{\pi}{4}$.

Lösung 7

Nullvektor $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ und $-A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
U wird von $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt, speziell: $A = 2 \cdot B_1 - 2 \cdot B_2$, d.h. U ist ein $2-$dimensionaler Unterraum von $\mathbb{M}$.

Lösung 8

v_6 =Nullvektor, er spielt ohnehin keine Rolle, er ist überflüssig.
Gauss-Algorithmus: Endschema

1	0	2	1	2	0
0	2	-6	-1	-2	0
0	0	-5	-5/2	-5	0
0	0	0	1	0	0

$Rang(A) = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) = 4$
$\mathbb{R}^4 = span\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = span\{v_1, v_2, v_4, v_5\} = span\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ v_1 & v_2 & v_3 & & v_5 \end{array} \right. \quad \text{bilden keine Basis, da } v_5 - 2v_2 = v_3\,!$$

Lösung 9

$V = \left\{ \vec{r} \,\middle|\, \vec{r} = \mu\vec{a}, \mu \in \mathbb{R} \right\} =$ span $\{\vec{a}\}$
Parameterdarstellung von $g: \vec{r} = \mu\,\vec{a}$, wobei $\vec{a}$ der Richtungsvektor der Geraden g ist.
zu zeigen ist:

- die Summe der Ortsvektoren zweier Punkte auf g ist in V
- jedes skalare Vielfache von $\vec{a}$ liefert einen Ortsvektor eines Punktes auf g

Seien $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ zwei Ortsvektoren zweier Punkte $P_1 \in g$ und $P_2 \in g$ der Geraden g.
Dann gilt: $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_3 = \mu_3\vec{a} =$ ein Ortsvektor eines dritten Punktes $P_3 \in g$
und $\mu\vec{a}$ ist der Ortsvektor eines weiteren beliebigen Punktes $P \in g$.