

Reelle Schreibweise der “komplexen” Lösung

Gegebene Differentialgleichung:

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \text{mit den AB} \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$$

Substitution:

$$z_1 = y \quad \text{und} \quad z_2 = y'$$

$$z' = Az, \quad \text{wobei} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad z_h(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \cdot v^{(1)} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \cdot v^{(2)},$$

$$\text{wobei } \lambda_1 = -1 + j \cdot 2 = \alpha_1 + j \cdot \beta_1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \lambda_1^*$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = u^{(1)} + j \cdot w^{(1)}$$

$$v^{(2)} = \left(v^{(1)} \right)^* = u^{(1)} - j \cdot w^{(1)}$$

Wahl:

$$c_1 = a_1 + j b_1 \quad \text{und} \quad c_2 = c_1^* = a_1 - j b_1, \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R}$$

Produkte mit konjugiert komplexen Faktoren sind wieder konjugiert komplex, d.h. obige beiden Summanden in (1) addiert, wird eine reelle Summe ergeben.

Erster Summand:

$$e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha_1 x} \cdot (\cos(\beta_1 x) + j \sin(\beta_1 x))$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 x} \cdot (u^{(1)} + j w^{(1)}) &= e^{\alpha_1 x} \cdot (\cos(\beta_1 x) + j \sin(\beta_1 x)) \cdot (u^{(1)} + j w^{(1)}) \\ &= e^{\alpha_1 x} \cdot (\cos(\beta_1 x) u^{(1)} - \sin(\beta_1 x) w^{(1)}) \\ &\quad + j \cdot e^{\alpha_1 x} \cdot (\cos(\beta_1 x) w^{(1)} + \sin(\beta_1 x) u^{(1)}) \\ &:= e^{\alpha_1 x} \cdot (\text{Ausdruck 1}) + j \cdot (\text{Ausdruck 2}) \end{aligned}$$

Zweiter Summand:

$$e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha_1 x} \cdot (\cos(\beta_1 x) - j \sin(\beta_1 x))$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_2 x} \cdot (u^{(1)} - jw^{(1)}) &= e^{\alpha_1 x} \cdot (\cos(\beta_1 x) - j \sin(\beta_1 x)) \cdot (u^{(1)} - jw^{(1)}) \\ &= e^{\alpha_1 x} \cdot (\cos(\beta_1 x)u^{(1)} - \sin(\beta_1 x)w^{(1)}) \\ &\quad - j \cdot e^{\alpha_1 x} \cdot (\cos(\beta_1 x)w^{(1)} + \sin(\beta_1 x)u^{(1)}) \\ &:= e^{\alpha_1 x} \cdot (\text{Ausdruck 1}) - j \cdot (\text{Ausdruck 2}) \end{aligned}$$

Erster Summand:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \cdot v^{(1)} &= (a_1 + jb_1) \cdot e^{\alpha_1 x} \cdot ((\text{Ausdruck 1}) + j \cdot (\text{Ausdruck 2})) \\ &= e^{\alpha_1 x} \cdot (a_1 \cdot \text{Ausdruck 1} - b_1 \cdot \text{Ausdruck 2}) \\ &\quad + j \cdot e^{\alpha_1 x} \cdot (a_1 \cdot \text{Ausdruck 2} + b_1 \cdot \text{Ausdruck 1}) \end{aligned}$$

Zweiter Summand:

$$\begin{aligned} c_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \cdot v^{(2)} &= (a_1 - jb_1) \cdot e^{\alpha_1 x} \cdot ((\text{Ausdruck 1}) - j \cdot (\text{Ausdruck 2})) \\ &= e^{\alpha_1 x} \cdot (a_1 \cdot \text{Ausdruck 1} - b_1 \cdot \text{Ausdruck 2}) \\ &\quad - j \cdot e^{\alpha_1 x} \cdot (a_1 \cdot \text{Ausdruck 2} + b_1 \cdot \text{Ausdruck 1}) \end{aligned}$$

Summe gemäss (1) der beiden Terme:

$$\begin{aligned} z_h(x) &= 2 \cdot e^{\alpha_1 x} \cdot (a_1 \cdot \text{Ausdruck 1} - b_1 \cdot \text{Ausdruck 2}) \\ &= 2 \cdot e^{\alpha_1 x} \cdot \{(a_1 \cos(\beta_1 x) - b_1 \sin(\beta_1 x)) u^{(1)} - (a_1 \sin(\beta_1 x) + b_1 \cos(\beta_1 x)) w^{(1)}\} \end{aligned}$$

speziell:

$$z_h(x) = 2 \cdot e^{-x} \cdot \{(a_1 \cos(2x) - b_1 \sin(2x)) u^{(1)} - (a_1 \sin(2x) + b_1 \cos(2x)) w^{(1)}\}$$

Bestimmung von a_1 und b_1

$$\begin{aligned} z_1(0) = 0 &= 2 \cdot (a_1) \implies a_1 = 0 \\ z_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 &= 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \{(-a_1)(-1) - (-b_1)((2))\} \implies b_1 = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Also

$$z(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\frac{\pi}{2}-x} \cdot \{\sin(2x)u^{(1)} + \cos(2x)w^{(1)}\} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\frac{\pi}{2}-x} \cdot \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ -\sin(2x) + \cos(2x) \end{pmatrix}$$

für $x \geq 0$.