MLAN4 Serie 10

Aufgabe 1 (MATLAB)

(1) $$y'(x) = -2xy^2 \qquad y(x_0) = \alpha$$

a) exakte Lösung von (1) in Abhängigkeit von x_0 und α.

Sei nun speziell $x_0 = -0.9$ und $\alpha = 0.8$ und $x_{\text{final}} = 5$:

b) Numerische Lösung mit dem verbesserten Polygonzug, $p = 2$ mit fixer Schrittweite $h = 0.1$.

c) Dasselbe Beispiel nun mit Ihrer *eigenen* adaptiven Schrittweitensteuerung `name23`.
Verwenden Sie zur Steuerung `tol = 1e-3`.

d) Grafik mit der exakten und den gerechneten Lösungen.

e) Grafik für die globalen Fehler $e_k := y(x_k) - y_k$ der beiden gerechneten Lösungen.
(halblogarithmisch, d.h. `semilogy(...)`)

Vergleichen Sie die Anzahl Teilintervalle, die für die beiden Methoden verwendet werden.

Aufgabe 2

Leiten Sie allgemein für ein zwei-stufiges Runge–Kutta Verfahren den lokalen Diskretisationsfehler

$$d_{k+1} = y(x_{k+1}) - y(x_k) - h \cdot \left\{ c_1 \cdot \overline{k}_1 + c_2 \cdot \overline{k}_2 \right\}$$

mit den entsprechenden Bedingungen für die zu wählenden Parameter a_2, b_{21}, c_1 und c_2 her.
Wie gross ist die Fehlerordnung p maximal?

Lösung 1

a)

$$y(x) = \frac{1}{x^2 + c}, \quad \text{wobei} \quad c = \frac{1}{\alpha} - x_0^2$$

```
h = .1
Anz Fkt Auswertungen mit verbPol (fixe Shrittweite)    n1 = 60
Anz Fkt Auswertungen mit vp23  (adaptive Steuerung)    n2 = 48
```

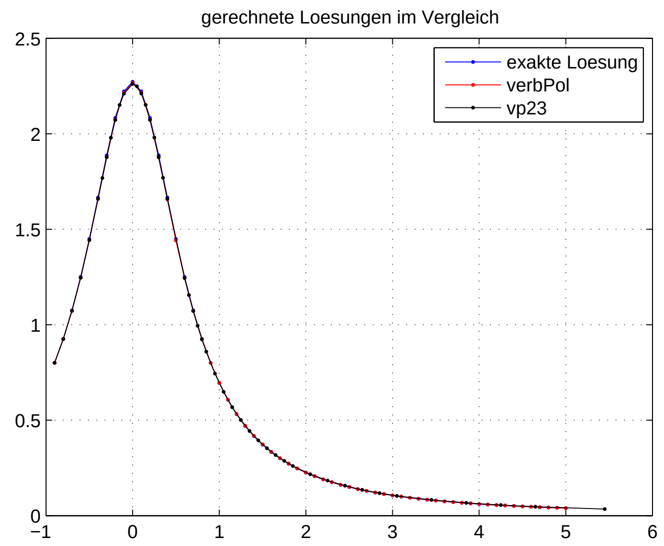

Abbildung 1: Testbeispiel der Theorie

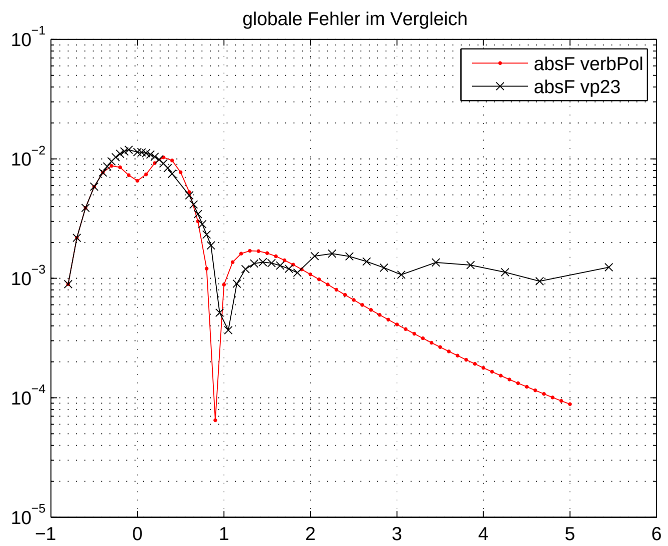

Abbildung 2: globale Fehler, absolut

Lösung 2

Mit Hilfe von Taylorreihen haben wir aus der Theorie

$$d_{k+1} = h \cdot f \cdot \{1 - c_1 - c_2\} + h^2 \cdot F \cdot \left\{ \frac{1}{2} - a_2 c_2 \right\} + O(h^3) \tag{2}$$

cf. p 19. Also

$$1 = c_1 + c_2 \tag{3}$$

$$\frac{1}{2} = a_2 c_2 \tag{4}$$

$$a_2 = b_{21} \quad \text{wurde in (2) bereits verwendet} \tag{5}$$

Lösungen obigen Gleichungssystems: mit dem freien Parameter $0 < a_2 \le 1$ erhalten wir $c_2 = \frac{1}{2a_2}$ und $c_1 = 1 - c_2$, also

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ a_2 & a_2 & \\ \hline & 1 - \frac{1}{2a_2} & \frac{1}{2a_2} \end{array} \qquad 0 < a_2 \le 1$$

Die Fehlerordnung ist $p = 2$.
Spezialfälle: verbesserter Polyonzug: $a_2 = \frac{1}{2}$, Heun: $a_2 = 1$.