MLAN4 Serie 11

Aufgabe 1

$$\dot{x} = \lambda\, x \qquad x(t_0) = \alpha$$

a) exakte Lösung

b) Lösung durch Entwicklung in eine Taylorreihe.

c) Konvergenzradius ρ der Reihe in b).

Aufgabe 2

Betrachten Sie die tridiagonale $n \times n-$ Matrix A bestehend aus 2 auf der Diagonalen und auf den Nebendiagonalen je eine -1.

a) Bestimmen Sie die Kondition von A bzgl. der $2-$Norm in Abhängigkeit von n, mit `Matlab`.

b) Was stellen Sie fest?

c) Versuchen Sie die EW von A zu bestimmen.

Aufgabe 3 (MATLAB)

Gegeben ist ein nicht-lineares Differentialgleichungssystem vom Typ $\dot{y}(t) = f(y)$, wobei $y \in \mathbb{R}^2$ und $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Betrachten wir dazu konkret ein Räuber-Beute Modell (Volterra-Lotka).

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{y}_1 & = & a \cdot y_1(1-y_2) \\ \dot{y}_2 & = & y_2 \cdot (y_1 - 1) \end{array} \right. \qquad \text{mit} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = 3 \\ y_2(0) = 1 \end{array} \right. \qquad a > 0 \quad \text{z.B.} \quad a = 0.8, 1, 2, \ldots, 10$$

$y_1(t)$ und $y_2(t)$ sind in Abhängigkeit der Zeit t die Masszahlen für die Grössen der Populationen der Beute- bzw. der Raubtiere.

Lösen Sie das gegebene Anfangswertproblem (AWP) mit verschiedenen numerischen Verfahren:

a) Heun der Ordnung $p = 2$

b) einem RK mit $p = 3$

c) mit *Ihrer eigenen* Schrittweitensteuerung (`name23`, d.h. eingebettete Verfahren der Ordnung zwei und drei), `tol = 1e-3`, damit Sie Ihr Verfahren mit dem Verfahren von Heun vergleichen können.

d) Stellen Sie in einem separaten Plot die verwendeten Schrittweiten von `name23` im Vergleich zu denjenigen von Heun graphisch dar.

Stellen Sie die Lösungen in einem Phasenporträt graphisch dar: y_1- Achse horizontal und y_2- Achse vertikal.
Versuchen Sie eine Graphik mit Vektorfeld und gerechneter Lösung.
Experimentiren Sie für verschiednene Werte von a. Was stellen Sie fest?

MLAN4 Lösungen Serie 11

Lösung 1

a) $x(t) = \alpha\, e^{\lambda(t-t_0)}$ für $t \geq t_0$.

b) $x^{(k)} = \lambda^k\, \alpha$, $k = 0, 1, 2, \dots$ und damit

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!}\,(t-t_0)^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\,(t-t_0)^k \qquad \text{Entwicklungszentrum: } t_0$$

c) $a_k = \alpha\, \frac{\lambda^k}{k!}$, woraus wir $\rho = \infty$ erhalten (Quotientenkriterium).

Lösung 2

a) `serie9_NMMa3_0405_5.m` in meinem public.

b) Je grösser n, desto schlechter die Kondition.

c) Zerlegung von $A = D + T$, wobei $D = 2 \cdot I_n$ und T der Rest von A, also

$$T = \text{diag}(-1, 0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & -1 & 0 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 0 & -1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Ax = (D+T)x = \lambda x = 2x + Tx = \lambda x$, d.h. es müssen die EW μ von T bestimmt werden, um die EW von A als $\lambda = 2 + \mu$ zu erhalten.

- $n = 2 : T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, EV: $v^k = \begin{pmatrix} \sin(k\pi h) \\ \sin(k\pi 2h) \end{pmatrix}$, $h = \frac{1}{2+1}$, $k = 1, 2$
  mit $Tv^k = \mu_k v^k$ und $\mu_k = -2\cos(k\pi h)$, $k = 1, 2$.
- $n = 3 : T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, EV: $v^k = \begin{pmatrix} \sin(k\pi h) \\ \sin(k\pi 2h) \\ \sin(k\pi 3h) \end{pmatrix}$, $h = \frac{1}{3+1}$, $k = 1, 2, 3$
  mit $Tv^k = \mu_k v^k$ und $\mu_k = -2\cos(k\pi h)$, $k = 1, 2, 3$.
- allgemein: EV: $v^k = \begin{pmatrix} \sin(k\pi h) \\ \sin(k\pi 2h) \\ \vdots \\ \sin(k\pi nh) \end{pmatrix}$, $h = \frac{1}{n+1}$, $k = 1, 2, \dots, n$
  mit $Tv^k = \mu_k v^k$ und $\mu_k = -2\cos(k\pi h)$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

$\Longrightarrow \lambda_k = 2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $k = 1, 2, \dots, n$

$\kappa(A) = \frac{\max|\lambda_k|}{\min|\lambda_k|} = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$, wobei $\lambda_n \to 4$ und $\lambda_1 \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. $\kappa(A) \to \infty$ für $n \to \infty$.

Lösung 3

Für dieses Problem können keine geschlossenen Lösungen mehr angegeben werden.
Es sollte eine periodische Lösung als Grenzzyklus entstehen.