MLAN4 Serie 12

Aufgabe 1

Betrachten Sie das folgende Runge–Kutta Verfahren mit $p = 4$.

$$
(1) \qquad \begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\
\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\
1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}
\end{array}
$$

Bestimmen Sie für (1) die Stabilitätsfunktion $R(h\lambda)$.

Aufgabe 2

Stabilitätsgebiet der verbesserten Polygonzugmethode:

a) Bestimmen Sie die Funktion $R(z)$.

b) Stabilitätsgebiet

c) Bedingung für h, damit die Methode stabil ist, falls $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (MATLAB)

Testen Sie Ihre *eigene* adaptive Steuerung (Verfahren `name23`) mit folgendem AWP:

$$
(2) \qquad y'(x) = -k\ (y(x) - \cos(x)) \quad k > 0 \qquad y(0) = 0.
$$

a) exakte Lösung von (2).

b) numerische Lösung mit Ihrer Steuerung `name23(...)`. (z.B. für $k = 30, 40, ...$)

c) numerische Lösung mit `ode23(...)`.

d) Vergleichen Sie die verwendeten Schrittweiten. Graphische Darstellung der Schrittweiten im selben plot.

Gegeben ist die lineare Differentialgleichung

$$y' = -\left(\sin\left(x^3\right) + 3x^3 \cdot \cos\left(x^3\right)\right) \cdot y \tag{3}$$

mit der AB $y(0) = 1$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die analytische Lösung von (3).

Aufgabe 5 (MATLAB)

Lösen Sie das gegebene Anfangswertproblem (3) mit verschiedenen numerischen Verfahren auf dem Intervall $[0, 3]$:

a) Heun der Ordnung $p = 2$

b) Einem Runge Kutta Verfahren mit $p = 3$

c) Mit *Ihrer eigenen* Schrittweitensteuerung (`name23`, d.h. eingebettete Verfahren der Ordnung zwei und drei), `tol = 1e-3`, damit Sie Ihr Verfahren mit dem Verfahren von Heun vergleichen können.

d) Stellen Sie in einem separaten Plot die verwendeten Schrittweiten von `name23` im Vergleich zu denjenigen von Heun graphisch dar und geben Sie die Anzahl Funktionsauswertungen an.

MLAN4 Lösungen Serie 12

Lösung 1

$$\begin{aligned}
k_1 &= \lambda y_k && (4)\\
k_2 &= \left(\lambda + \frac{h}{3}\lambda^2\right) y_k && (5)\\
k_3 &= \left(\lambda + \frac{2h}{3}\lambda^2 + \frac{h^2}{3}\lambda^3\right) y_k && (6)\\
k_4 &= \left(\lambda + h\lambda^2 + \frac{h^2}{3}\lambda^3 + \frac{h^3}{3}\lambda^4\right) y_k && (7)\\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{8}\{k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4\} && (8)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow R(h\lambda) = 1 + (h\lambda) + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + \frac{(h\lambda)^4}{24} + O(h^5)$

Lösung 2

a) $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$

b) identisch mit dem Gebiet für die Methode von Heun, $p = 2$.

c) $-2 < h\lambda < 0 \Longrightarrow \frac{2}{|\lambda|} > h > 0$, falls $\lambda < 0$.

Lösung 3

a) $y_a(x) = y_h(x) + y_p(x)$, wobei $y_h(x) = c_1\, e^{-50\,x}$ und
$y_p(x) = \frac{k^2}{k^2+1}\cos(x) + \frac{k}{k^2+1}\sin(x)$, cf. Ansätze im Papula oder Variation der Konstanten.
Bestimmung von c_1 mit der AB: $c_1 = -\frac{k^2}{k^2+1}$

Lösung 4

Die Differentialgleichung ist homogen und separierbar:

$$y_h(x) = C \cdot e^{-x\cdot\sin(x^3)} \qquad \text{AB: } C = 1 \qquad \Longrightarrow y(x) = e^{-x\cdot\sin(x^3)} \quad x \geq 0.$$

Lösung 5

`MATLAB code`