MLAN4 Serie 13

Aufgabe 1

Gegeben ist das Anfangswertproblem

(1) $$\dot{y} = -200 \cdot t \cdot y^2 \qquad t \in [-0.8,\, -0.2] \qquad y(-0.8) = \frac{1}{65}$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (1).

b) Testen Sie ihre Schrittweitensteuerung mit (1) und vergleichen Sie die Anzahl Intervalle mit einem Verfahren fixer Schrittweite, die nötig sind für eine vorgegebene Toleranz `tol`

Aufgabe 2

Gegeben ist ein zweistufiges implizites Runge Kutta Verfahren in der allgemeinen Form

$$\begin{array}{c|cc} a_1 & b_{11} & b_{12} \\ a_2 & b_{21} & b_{22} \\ \hline & c_1 & c_2 \end{array}$$

Speziell sei nun $a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$, $b_{11} = \frac{1}{4}$, $b_{12} = \frac{3-2\sqrt{3}}{12}$
$a_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$, $b_{21} = \frac{3+2\sqrt{3}}{12}$, $b_{22} = \frac{1}{4}$ und $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$.

a) Überprüfen Sie die Nebenbedingungen $a_1 = b_{11} + b_{12}$ und $a_2 = b_{21} + b_{22}$.

b) Bestimmen Sie $R(z)$ von diesem Verfahren.

c) Bestimmen Sie das dazugehörige Stabilitätsgebiet $\mathbb{S}$.

Aufgabe 3 (MATLAB) *Implizite Mittelpunktregel*

Eine harmonische Schwingung kann weder mit dem expliziten, noch mit dem impliziten Euler zufriedenstellend numerisch approximiert werden, cf. die Aufgabe 1 der Serie 4 sowie die Aufgabe 2 der Serie 6.
Betrachten Sie das folgende Anfangswertproblem:

(2) $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
(3) $$x(0) = \alpha$$
(4) $$\dot{x}(0) = \beta$$

Impliziter und expliziter Euler können aber auf eine gute Weise miteinander "verheiratet" werden, sodass daraus ein effizienter und robuster Algorithmus entsteht.

(5) $$k_1 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot k_1\right)$$
(6) $$y_{k+1} = y_k + h \cdot k_1$$

(5) und (6) zusammen bilden die sogenannte *implizite Mittelpunktregel*.
Für k_1 in (5) wird der implizite Euler verwendet und beim Korrektor (6) kommt der explizite Euler zum Zug.

a) Approximieren Sie die Lösung von (2) mit den AB (3) und (4) mit diesem Verfahren.

b) Vergleich mit der analytischen Lösung:

graphische Darstellung beider Lösungen im Phasenporträt inklusive Vektorfeld.

- $t_0 = 0$ und $t_{\mathsf{final}} = 10\pi$ (5 Umläufe).
- feste Schrittweite $h = 0.1, 0.2, ...$ z.B. und zum Vergleich mit
- *Ihrer* adaptiven Steuerung `name23`.

c) Stellen Sie die globalen Fehler in einem separaten plot halblogarithmisch graphisch dar.

Achtung: für die implizite Mittelpunktregel, müssen Sie die exakte Lösung y_{exakt} an den Mittelpunkten der Teilintervalle bestimmen.

d) Vergleichen Sie obige Methode mit `ode23(...)` von `MATLAB`. Stellen Sie die globalen Fehler halblogarithmisch in einer separaten Grafik dar.

MLAN4 Lösungen Serie 13

Lösung 1

Die gegebene Differentialgleichung in (1) ist separierbar.

a)

$$y(t) = \frac{1}{1 + 100 \cdot t^2} \qquad t \in [-0.8,\ -0.2]$$

b) `MATLAB code`

Lösung 2

a) durch Nachrechnen

b) Testbeispiel $y' = \lambda y$ mit $y(0) = 1$; somit $f(x, y) = \lambda y$.

$$(7) \qquad k_1 = \lambda(y_k + b_{11}hk_1 + b_{12}hk_2) \implies (1 - (h\lambda)b_{11})k_1 - (h\lambda)b_{12}k_2 = \lambda y_k$$

$$(8) \qquad k_2 = \lambda(y_k + b_{21}hk_1 + b_{22}hk_2) \implies -(h\lambda)b_{21}k_1 + (1 - (h\lambda)b_{22}k_2 = \lambda y_k$$

Hier haben wir ein lineares Gleichungssystem für k_1 und k_2:
Die Lösung ist hier am einfachsten mit der Cramer'schen Regel.

$$(9) \;\; k_1 = \frac{\left(1 - (h\lambda)\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\lambda y_k}{\text{Nenner}} \qquad k_2 = \frac{\left(1 + (h\lambda)\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\lambda y_k}{\text{Nenner}} \qquad \text{mit dem Nenner} = 1 - \frac{(h\lambda)}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{12}$$

Mit (9) erhalten wir

$$(10) \qquad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{k_1 + k_2\} = y_k + \frac{(h\lambda)y_k}{\text{Nenner}} = R(h\lambda)y_k,$$

wobei

$$R(h\lambda) = \frac{1 + \frac{(h\lambda)}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{12}}{1 - \frac{(h\lambda)}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{12}} = \frac{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}}{1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}} =: R(z) \qquad z := (h\lambda)$$

c) $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |R(z)| < 1\}$

$$|R(z)| < 1 \iff \left|1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}\right| < \left|1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}\right|$$

Mit $z = x + jy$ erhalten wir:

$$(11) \qquad \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{12}(x^2 - y^2)\right)^2 + \left(\frac{y}{2} + \frac{xy}{6}\right)^2 < \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}(x^2 - y^2)\right)^2 + \left(-\frac{y}{2} + \frac{xy}{6}\right)^2$$

In (11) sind die Quadrate links und rechts identisch, heben sich also gegenseitig auf. Es genügt, die gemischten Produkte zu betrachten:

$$x + \frac{1}{6}(x^2 - y^2) + x\frac{1}{12}(x^2 - y^2) + y\frac{xy}{6} < -x + \frac{1}{6}(x^2 - y^2) - x\frac{1}{12}(x^2 - y^2) - y\frac{xy}{6}$$

Nun alles auf die linke Seite nehmen

$$2x + 2x \cdot \frac{1}{12} \cdot (x^2 - y^2) + 2y \cdot \frac{xy}{6} < 0$$

und vereinfachen:

$$x \cdot \left(1 + \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12}\right) < 0 \Longleftrightarrow x < 0 \qquad \text{d.h. } \mathrm{Re}(z) < 0$$

Die Methode ist also absolut stabil.

Lösung 3

`MATLAB code`