Klasse WI09b FrSe 11 ungr

MLAN4 Serie 1

Aufgabe 1

Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) := 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - x_2 - 6$$

$Q(x_1, x_2) = 0$ definiert eine Kurve in $\mathbb{R}^2$. Um was für eine Kurve handelt es sich hier?
Hauptachsentransformation und graphische Darstellung.

Aufgabe 2

Für die folgenden Kurven $2-$ ter Ordnung (Kegelschnitte) soll eine Hauptachsentransformation durchgeführt werden. Geben Sie an, um welche Art von Kegelschnitt es sich handelt, graphische Darstellung.

a) $Q(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 13x_2^2 + 6\sqrt{3}x_1x_2 - 12(\sqrt{3} + 4)x_1 - 12(4\sqrt{3} - 1)x_2 + 164 = 0$

b) $Q(x_1, x_2) = 16x_1^2 + 24x_1x_2 + 9x_2^2 + 60x_1 - 80x_2 = 0$

c) $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2 - 4x_1 - 3x_2 - 23 = 0$

Aufgabe 3

Formel von Euler: $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$

a) Entwickeln Sie $e^{j\varphi}$ mit einer Taylorreihe, Entwicklungszentrum $\varphi_0 = 0$.

b) Trennen Sie die Real- und Imaginärteile und zeigen Sie so, dass die Formel von Euler gültig ist, bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ.

c) analog für $e^{-j\varphi}$.

Aufgabe 4

Sei $A = \begin{pmatrix} 168 & 113 \\ 113 & 76 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 168 \\ 113 \end{pmatrix}$ und $\hat{b} = \begin{pmatrix} 168 \\ 112.99 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie die exakten Lösungen x bzw. $\hat{x}$ von $Ax = b$, bzw. $A\hat{x} = \hat{b}$

b) Bestimmen Sie die Kondition von A bzgl. der $2-$Norm

c) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den relativen Abweichung $\delta_b = \frac{\|b-\hat{b}\|_2}{\|b\|_2}$ der rechten Seiten und der relativen Abweichung der Lösungen $\delta_x = \frac{\|x-\hat{x}\|_2}{\|x\|_2}$

Aufgabe 5

Betrachten Sie die tridiagonale $n \times n-$ Matrix A bestehend aus 2 auf der Diagonalen und auf den Nebendiagonalen je -1.

a) Bestimmen Sie die Kondition von A bzgl. der $2-$Norm in Abhängigkeit von n, mit Matlab.

b) Was stellen Sie fest?

c) Versuchen Sie die EW von A zu bestimmen.

Aufgabe 6

Fundamentalsatz der Algebra und eine Anwendung des Satzes von Vïeta:

a) Gegeben ist das Polynom $\lambda^{2011} + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. (Wir befinden uns im Jahr 2011.)

   Gesucht ist die Summe der $2011-$ten Potenz sämtlicher Nullstellen λ_k, also $s = \sum\limits_{k=1}^{2011} \lambda_k^{2011}$.

b) Etwas allgemeiner:

   Gegeben ist das Polynom $\lambda^n + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, wobei $n \geq 4$.

   Gesucht ist die Summe der $n-$ ten Potenz aller Nullstellen λ_k, also $s = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^n$.

MLAN4 Lösungen Serie 1

Lösung 1

Ellipse, denn $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, $det(A) = \frac{15}{4} = \lambda_1\lambda_2$, $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Kegelschnitt im neuen Koordinatensystem Σ_{neu} $(x = Tz)$:

$$\frac{5}{2}\,\frac{(z_1 - \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{8} + \frac{3}{2}\,\frac{(z_2 + \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{8} = 1$$

Halbachsen: $a = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $b = \frac{4}{\sqrt{3}}$ $M_{neu}(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ und $M_{alt}(1, 0)$.
Es handelt sich somit um eine Drehung D_φ mit $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und eine Translation mit $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung 2

allgemein: $x^T Ax + c^T x + k = 0$, wobei $A = A^T$; det(A) liefert den Typ des Kegelschnitts.

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$, det$(A) = 64$, es handelt sich somit um eine Ellipse.

$\lambda_1 = 16$, $E_{\lambda_1} =$span$\{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\}$, $\lambda_2 = 4$, $E_{\lambda_2} =$span$\{\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\}$

$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ mit $T^T AT = D = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Σ_{neu} ist um $\varphi = \frac{\pi}{3}$ verdreht.

In Σ_{neu} gilt: $16x^2_{neu_1} + 4x^2_{neu_2} + c^T_{neu}x_{neu} + 164 = 0$, wobei $c_{neu} = T^T c = \begin{pmatrix} -96 \\ 24 \end{pmatrix}$

Quadratische Ergänzung: $16(x_{neu_1} - 3)^2 + 4(x_{neu_2} + 3)^2 = 16 \Longrightarrow \frac{(x_{neu_1}-3)^2}{1} + \frac{(x_{neu_2}+3)^2}{4} = 1$
mit Mittelpunkt $M_{neu}(3, -3)$ und $M_{alt}\left(\frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}), \frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1)\right)$, d.h. Translation
mit dem Vektor $\vec{t} = \overrightarrow{OM} = T \cdot \overrightarrow{OM}_{neu} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$, det$(A) = 0$, es handelt sich somit um eine Parabel.

$\lambda_1 = 25$, $E_{\lambda_1} =$span$\{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\}$, $\lambda_2 = 0$, $E_{\lambda_2} =$span$\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\}$

$T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ mit $T^T AT = D = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Σ_{neu} ist um $\varphi = \arctan(\frac{3}{4})$ verdreht.

In Σ_{neu} gilt: $25x^2_{neu_1} + c^T_{neu}x_{neu} = 0$, wobei $c_{neu} = T^T c = \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \end{pmatrix}$

Also: $25x^2_{neu_1} - 100x_{neu_2} = 0$, $\Longrightarrow x_{neu_2} = \frac{1}{4}x^2_{neu_1}$; (quadrat. Erg. ist hier überflüssig).
Parabel mit Scheitelpunkt $S_{neu}(0, 0)$ ist identisch mit $S_{alt}(0, 0)$, also keine Translation $\vec{t}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -\frac{25}{4}$, es handelt sich somit um eine Hyperbel.

$\lambda_1 = \frac{5}{2}$, E_{λ_1} =span$\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$, E_{λ_2} =span$\{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$

$T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ mit $T^T A T = D = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Σ_{neu} ist um $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ verdreht.

In Σ_{neu} gilt: $\frac{5}{2}x_{1neu}^2 - \frac{5}{2}x_{2neu}^2 + c_{neu}^T x_{neu} - 23 = 0$, wobei $c_{neu} = T^T c = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \end{pmatrix}$

Quadratische Ergänzung: $\frac{5}{2}(x_{1neu} - \frac{3}{\sqrt{10}})^2 - \frac{5}{2}(x_{2neu} + \frac{1}{\sqrt{10}})^2 = 25$

$\Longrightarrow \frac{(x_{1neu} - 3/\sqrt{10})^2}{10} - \frac{(x_{2neu} + 1/\sqrt{10})^2}{10} = 1$

mit Mittelpunkt $M_{neu}(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$ und $M_{alt}\,(1, 0)$, d.h. Translation

mit dem Vektor $\vec{t} = \overrightarrow{OM} = T\overrightarrow{OM}_{neu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung 3

Die Exponentialreihe ist auch konvergent für komplexe Argumente, d.h. man darf die Real- und Imaginärteile zusammenfassen.

a) $e^{j\varphi} = 1 + \frac{j\varphi}{1!} + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{(j\varphi)^3}{3!} + \ldots + \frac{(j\varphi)^k}{k!} + \ldots$

b) $e^{j\varphi} = \left(1 - \frac{(\varphi)^2}{2!} + \frac{(\varphi)^4}{4!} - + \ldots\right) + j\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{(\varphi)^3}{3!} + \frac{(\varphi)^5}{5!} - + \ldots\right) = \cos\varphi + j\sin\varphi$,

$\rho = \infty$ für beide Teile.

c) mit der Entwicklung von a): $e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi$

Lösung 4

`serie9_NMMa3_0405_4.m` in meinem public

a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{x} = \begin{pmatrix} -0.13 \\ 1.68 \end{pmatrix}$

b) $\lambda_{1.2} = 122 \pm \sqrt{122^2 + 1}$, Kondition von A: $\kappa(A) = \frac{\max|\lambda_k|}{\min|\lambda_k|} = \frac{122+\sqrt{122^2+1}}{|122-\sqrt{122^2+1}|} \approx 5.954 \cdot 10^4$

c) $\delta_x \leq \kappa(A) \cdot \delta_b$

Lösung 5

a) `serie9_NMMa3_0405_5.m` in meinem public

b) je grösser n, desto schlechter die Kondition

c) $\lambda_k = 2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, n$

$\kappa(A) = \frac{\max|\lambda_k|}{\min|\lambda_k|} = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$, wobei $\lambda_n \to 4$ und $\lambda_1 \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. $\kappa(A) \to \infty$ für $n \to \infty$.

Lösung 6

Die Nullstellen werden von 1 bis n durchnumeriert: λ_1, λ_2, ..., λ_k, ..., λ_n

a) Vieta: $\sum\limits_{k=1}^{2011} \lambda_k = 0$, da der Term λ^{2010} *nicht* vorkommt.

D.h. $\left(\sum\limits_{k=1}^{2011} \lambda_k\right)^2 = \sum\limits_{k=1}^{2011} \lambda_k^2 + 2 \cdot \sum\limits_{k \neq j} \lambda_k \lambda_j = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{2011} \lambda_k^2 = 0$ und $\sum\limits_{k \neq j} \lambda_k \lambda_j = 0.$

Weiter gilt für jedes λ_k:

$$\lambda_k^{2011} = -\lambda_k^2 - \lambda_k - 1 \qquad k = 1, 2, \ldots, 2011 \tag{1}$$

Summation von (1) liefert:

$$\sum_{k=1}^{2011} \lambda_k^{2011} = -\sum_{k=1}^{2011} \lambda_k^2 - \sum_{k=1}^{2011} \lambda_k - 2011 \tag{2}$$

und mit obiger Folgerung erhalten wir $s = \sum\limits_{k=1}^{2011} \lambda_k^{2011} = -2011$

b) Analog: statt 2011 haben wir n bzw. $n-1$ in obigen Gleichungen einzusetzen, also

$$s = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n = -n \qquad n \geq 4.$$

Für $n = 3$ sind obige Überlegungen nicht korrekt, da der Term λ^{n-1} auch vorkommt!