MLAN4 Serie 2

Aufgabe 1

Bestimmen Sie Maximum und Minimum der quadratischen Formen

$$\text{a) } 5x_1^2 - x_2^2 \qquad \text{b) } 7x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1^2 + x_2^2 = \|x\|_2^2 = 1.$$

Bestimmen Sie alle Werte x_1, x_2 für die diese Extrema angenommen werden.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie Maximum und Minimum der quadratischen Formen

$$\text{a) } x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 \qquad \text{b) } 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|_2^2 = 1.$$

Bestimmen Sie alle Werte x_1, x_2 und x_3 für die diese Extrema angenommen werden.

Aufgabe 3

Eine symmetrische Matrix A heisst *positiv definit*, falls *alle* Eigenwerte von A positiv sind.
Welche der folgenden Matrizen sind positiv definit?

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Falls A postiv definit ist, ist mit

$$(x, y) := x^T A y \tag{1}$$

ein Skalarprodukt definiert.
Warum muss A in (1) positiv definit sein?

Aufgabe 4 *Methode der kleinsten Quadrate*

d.h. $Ax = b$, wobei $A = m \times n-$ Matrix, mit $m > n$.
$m =$ Anzahl Messungen und $b =$ gemessene Werte.
So, wie das Gleichungssytem gegeben ist, *kann* es keine Lösung haben (Widersprüche!).
Gesucht wird eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|Ax - b\| = \|r\|$ minimal ist.

$$\begin{aligned}
(2) \qquad \|Ax - b\| &= \|r\| \quad \text{minimal} \\
&\iff r \perp \text{Spaltenraum von } A \\
&\iff r \in \text{Kern von } A^T \\
(3) \qquad &\iff (A^T A)x - A^T b = 0
\end{aligned}$$

Bei der Lösung von (3) ist die Kondition der Matrix $C = A^T A$ entscheidend. $\|..\|$ steht hier für die $2-$ Norm.

Speziell

Das zweite Newton'sche Gesetz beschreibt den freien Fall eines Körpers in der Nähe der Erdoberfläche durch die Gleichung

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2, \tag{4}$$

wobei s den vertikalen Abstand des Körpers zu einem festen Bezugspunkt, s_0 den Anfangswert von s zur Zeit $t = 0$, v_0 die Anfangsgeschwinigkeit zur Zeit $t = 0$ und g die Erdbeschleunigung bezeichnet.
Aus (4) soll g experimentell bestimmt werden. Dazu wird ein Körper mit unbekannter Anfangshöhe und -geschwindigkeit fallengelassen und sein vertikaler Abstand zu einem gegebenen Bezugspunkt zu verschiedenen Zeiten gemessen.
Es ergeben sich für die Zeiten t_k die Abstände s_k, $k = 1, 2, \ldots, 5$.

t_k	$0.1s$	$0.2s$	$0.3s$	$0.4s$	$0.5s$
s_k	$-0.055m$	$0.095m$	$0.314m$	$0.756m$	$1.137m$

Daraus soll für g ein Näherungswert bestimmt werden.
Bestimmen Sie die Kondition in der $2-$ Norm der Matrix $C = A^T A$ bevor Sie g aus (3) bestimmen.

Aufgabe 5

a) Lösen Sie das folgende Differentialgleichungssystem mit Hilfe der Fundamentalmatrix $\Phi(t) = e^{tA}$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 &= 4y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit den Anfangsbedingungen: $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 6$.

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k^3 & -3k^2 & 3k \end{pmatrix}$, $k \neq 0$.

Ist A diagonalisierbar? (*mit* Begründung)

b) Sei A eine quadratische Matrix mit $A^3 = A$. was können Sie über die Eigenwerte von A aussagen?

MLAN4 Lösungen Serie 2

Lösung 1

$Q(x_1, x_2) = x^T A x$, wobei $A = 2 \times 2-$ Matrix, anschliessend EWP von A.
Die gegebene NB heisst, dass die zugehörigen EV zu normieren sind!

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 5$ ist das Maximum, wird angenommen für $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1$ ist das Minimum, wird angenommen für $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 7 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}(11+\sqrt{10})$ ist das Maximum, wird angenommen für $\pm\frac{1}{\sqrt{20+6\sqrt{10}}} \begin{pmatrix} 3+\sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}(11-\sqrt{10})$ ist das Minimum, wird angenommen für $\pm\frac{1}{\sqrt{20-6\sqrt{10}}} \begin{pmatrix} 3-\sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung 2

$Q(x_1, x_2) = x^T A x$, wobei $A = 3 \times 3-$ Matrix, anschliessend EWP von A.
Die gegebene NB heisst, dass die zugehörigen EV zu normieren sind!

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 4$ ist das Maximum, wird angenommen für $\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -2$ ist das Minimum, wird angenommen für $\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 4$ ist das Maximum, wird angenommen für $\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$ ist das Minimum, wird angenommen für $\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und für $\pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, da λ_2 doppelt!

Lösung 3

EWP der entsprechenden Matrix

a) $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = -1$, d.h. A ist nicht postiv definit.

b) $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = 4$, d.h. B ist also positiv definit.

c) $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$, d.h. C ist nicht positiv definit.

Betrachte $\Sigma_{neu} = \text{span}\{v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}\} =$ Eigenbasis von A, d.h. $Av^{(k)} = \lambda_k v^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Wähle Σ_{neu} ortho–normiert, da A symmetrisch.
Sei $x = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k v^{(k)}$, dann gilt $(x, x) = x^T A x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k c_k^2 > 0$. Damit die letzte Ungleichung für *alle* $x \neq 0$ gültig ist, müssen *alle* EW positiv sein.

Lösung 4

Ansatz für $s(t)$:

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \tag{5}$$

(5) sollte nun für jede Messung zu erfüllt werden:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.01 \\ 1 & 0.2 & 0.04 \\ 1 & 0.3 & 0.09 \\ 1 & 0.4 & 0.16 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -0.055 \\ 0.095 \\ 0.314 \\ 0.756 \\ 1.137 \end{pmatrix} \qquad C = A^T A = \begin{pmatrix} 5.0000 & 1.5000 & 0.5500 \\ 1.5000 & 0.5500 & 0.2250 \\ 0.5500 & 0.2250 & 0.0979 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$\lambda_{max} = 5.5229$ und $\lambda_{min} = 1.0227 \cdot 10^{-3} \Longrightarrow \kappa(C) = \|C\|_2 \cdot \|C^{-1}\|_2 = \frac{5.5229}{1.0227 \cdot 10^{-3}} \approx 5.4002 \cdot 10^3$
Zu lösen ist $Cx = A^T b$, woraus wir $a_0 = -0.12160$, $a_1 = 0.10929$ und $a_2 = 4.8929$ erhalten,
woraus $g \approx 2 \cdot a_2 = 9.7857\ \frac{m}{s^2}$

Lösung 5

a) $\dot{y} = Ay$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$,

EWP von A: $\lambda_1 = 2$ mit $E_{\lambda_1} = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ und $\lambda_2 = -3$ mit $E_{\lambda_2} = \text{span}\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\}$

$A = TDT^{-1} \Longrightarrow e^{tA} = Te^{tD}T^{-1}$, wobei $T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, schliesslich

$\Phi(t) = e^{tA} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-3t} & \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \\ e^{2t} - e^{-3t} & \frac{1}{4}e^{2t} + e^{-3t} \end{pmatrix}$

allgemeine Lösung: $y_h(t) = \Phi(t)y_0$, wobei $y_0 \in \mathbb{R}^2$.

b) AB: $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und damit spezielle Lösung $y(t) = \Phi(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-3t}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösung 6

a) $\lambda = k$ dreifach. A ist nicht diagonalisierbar, da dim(Kern$(A - kI_3)) = 1$, statt drei!
geomVF$(\lambda) = 1 <$ algVF$(\lambda) = 3$.

b)
- Voraussetzung: A^{-1} existiert.
  $A^3 = A \Longleftrightarrow A^3 - A = 0 \Longleftrightarrow A(A^2 - I_n) = 0 \Longleftrightarrow A^2 = I_n \Longleftrightarrow A = A^{-1} \Longleftrightarrow A$ orthogonal und symmetrisch $\Longleftrightarrow A = A^{-1} = A^T \Longrightarrow$ EW von A sind ± 1.

- Voraussetzung: A^{-1} existiert nicht.

  Sei $v^{(k)}$ ein EV von A zum EW λ_k, d.h. $Av^{(k)} = \lambda_k v^{(k)} \Longrightarrow A^3 v^{(k)} = \lambda_k^3 v$

  Da $A^3 = A$ folgt $\lambda_k^3 = \lambda_k$, für jeden EW von A.

  $\Longrightarrow p_A(\lambda)$ besteht aus lauter Faktoren der Form $(\lambda_k^3 - \lambda_k) \Longrightarrow$ als Lösungen kommen nur 0 und ± 1 vor.