MLAN4 Serie 3

Aufgabe 1

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

(1) $$\dot{y} = Ay \qquad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1).

b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung mit den Anfangsbedingungen (AB): $y_1(0) = y_2(0) = 0$.

c) Wie müssen die AB $y_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ gewählt werden, damit die Lösung $y(t)$ für $t \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt.

Aufgabe 2

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

(2) $$\dot{y} = Ay \qquad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (2).

b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung mit den AB: $y_1(0) = 2$ und $\dot{y}_2(0) = 1$.

Aufgabe 3

Gegeben ist das *inhomogene* Differentialgleichungssystem

(3) $$\dot{y} = Ay + g \qquad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und } g = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine homogene Lösung von (3).

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ von (3).

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (3).

Aufgabe 4

Lösen Sie die Differentialgleichung

(4) $$\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 0$$

a) mit Hilfe von $\Phi(t) = e^{tA}$.

b) durch Entkopplung.

c) mit der Methode, wie Sie es in der Analysis gelernt haben.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 6\ddot{y} + 11\dot{y} - 6y = 0. \tag{5}$$

Dabei ist $y^{(3)}$ in (5) die dritte Ableitung von y nach t.

a) Formulieren Sie (5) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Lösen Sie das System in a) durch Entkopplung.

c) Gibt es AB so, dass die Lösung $y(t)$ für $t \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt? (*mit* Begründung)

Aufgabe 6

Entkoppeln Sie das Differentialgleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \dot{x}_1 & = & -16x_1 & - & 17x_2 & - & 18x_3 \\ \dot{x}_2 & = & 6x_1 & + & 7x_2 & + & 6x_3 \\ \dot{x}_3 & = & 9x_1 & + & 9x_2 & + & 11x_3 \end{array}\right.$$

a) Geben Sie die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems an.

b) Für welche Anfangsbedingungen gehen alle Lösungen für $t \to \infty$ gegen Null.

c) Lösen Sie das auftretende EWP auch mit MATLAB, Vergleich?

Aufgabe 7

Gegeben sind die $n \times n-$ Matrizen A und C, sowie die Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$.
$B := x \cdot y^T$ und weiter $U := ABC$.
Behauptung:

$$U^k = \texttt{factor} \cdot U \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad\qquad \texttt{factor} = ?$$

Beweisen Sie obige Behauptung und bestimmen Sie `factor`.

MLAN4 Lösungen Serie 3

Lösung 1

EWP von A:

a) $y_h(t) = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) $y(t) = 0$, beide Komponenten identisch Null.

c) $c_1 = 0 \Longleftrightarrow \alpha + 2\beta = 0$

Lösung 2

EWP von A:

a) $y_h(t) = c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) $c_1 = -\frac{1}{40}$ und $c_2 = -\frac{27}{40}$

Lösung 3

EWP von A:

a) $y_h(t) = c_1 e^{8t} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) im entkoppelten System: $g_{neu} = T^{-1} g = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$

$\dot{y}_{neu_p} = D y_{neu_p} + g_{neu}$, da g_{neu} linear in t muss für jede Komponente von y_{neu_p} ein lineares Polynom in t als Ansatz verwendet werden:

$$y_{neu_p}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{72}(\frac{1}{8} + t) \\ \frac{2}{9}(t-1) \end{pmatrix} \Longrightarrow y_p(t) = T y_{neu_p}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\frac{7}{8} - t) \\ -\frac{1}{8}(\frac{15}{8} - t) \end{pmatrix}$$

c) $y_a(t) = y_h(t) + y_p(t)$

Lösung 4

a) Substitution: $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{y} \Longrightarrow \dot{x} = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

EWP von A: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ mit $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} \end{pmatrix}$

$e^{tA} = T e^{tD} T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2e^{3t} + 3e^{-2t} & e^{3t} - e^{-2t} \\ 6e^{3t} - 6e^{-2t} & 3e^{3t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \Longrightarrow x(t) = \Phi(t) x_0$

b) $x_h(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

c) $y_h(t) =$ erste Komponente der Lösung aus b).

Lösung 5

a) Substitution: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ und $x_3 = \ddot{y} \Longrightarrow \dot{x} = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$

b) EWP von A: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$, EV $v^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^2 \end{pmatrix}$, $k = 1, 2, 3$.

$$x_h(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

c) Nein, da alle EW positiv sind.

Lösung 6

EWP von A: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ mit den EV: $v^{(1)} = \nu(7,\ -3,\ -3)^T$, $v^{(2)} = \nu(-1,\ 1,\ 0)^T$, $v^{(3)} = \nu(-1,\ 0,\ 1)^T$
$T = \big(v^{(1)}\ v^{(2)}\ v^{(3)}\big)$ spaltenweise, $D = T^{-1}AT = diag(-1, 1, 2)$

a) $x_h(t) = c_1 e^{-t} v^{(1)} + c_2 e^t v^{(2)} + c_3 e^{2t} v^{(3)}$

b) $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 = c_3 = 0$

c) `[T, D] = eig(A)`, in der Diagonalen von D stehen die EW von A, T enthält spaltenweise die EV.

Lösung 7

$U = ABC = A \cdot (x \cdot y^T) \cdot C = (Ax) \cdot (y^T C)$, wobei $Ax =$Spalte und $y^T C =$ Zeile.
$U^2 = (Ax) \cdot (y^T C) \cdot (Ax) \cdot (y^T C) = (Ax) \cdot \big[(y^T C) \cdot (Ax)\big] \cdot (y^T C)$, wobei $\big[(y^T C) \cdot (Ax)\big] = \texttt{factor} \in \mathbb{R}$, also
$U^2 = \big[(y^T C) \cdot (Ax)\big] \cdot U$, $U^3 = \big[(y^T C) \cdot (Ax)\big]^2 \cdot U$
und allgemein: $U^k = \big[(y^T C) \cdot (Ax)\big]^{k-1} \cdot U$, also `factor` $= \big[(y^T C) \cdot (Ax)\big]^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$