MLAN4 Serie 4

Aufgabe 1

Gegeben ist das Differentialgleichung

(1) $$\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = \cos(t) \qquad y(0) = \alpha \qquad \dot{y}(0) = \beta$$

a) klassisch

b) Formulierung von (1) als Differentialgleichungssystem von Differentialgleichungen erster Ordnung.

c) Lösung von b).

Aufgabe 2

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

(2) $$\dot{x} = Ax \qquad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mit den AB $x_1(0) = 1$ und $x_2(0) = 1$.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (4).

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung von (4) für die gegebenen AB.

c) Bestimmen Sie $x_2(0.5)$.

Aufgabe 3

Gegeben ist das *homogene* Differentialgleichungssystem

(3) $$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Allgemeine Lösung von (3).

b) Spezielle Lösung für die gegebene AB.

Aufgabe 4

(4) $$\ddot{y} - \dot{y} + 6y = 0$$

a) Schreiben (4) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Lösen Sie das Differentialgleichungungssystem in a).

c) Sei nun $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$. Bestimmen Sie die dazu gehörige Lösung.

d) Aus technischen Gründen können Sie nicht im Nullpunkt mit der Lösung für c) starten, sondern nur etwas daneben, nämlich im Punkt "x_0" $= (10^{-8}, 0)$. Was wird geschehen, wohin strebt die Lösung?

MLAN4 Lösungen Serie 4

Lösung 1

a) $y_a(t) = y_h(t) + y_p(t)$, wobei $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-4t}$ die allgemeine Lösung der homogenen Dgl und $y_p(t) = \frac{3}{34}\sin(t) - \frac{5}{34}\cos(t)$ *eine* partikuläre Lösung von (3), Ansatz gemäss Papula, p...
AB:

$$(5) \qquad y(0) = \alpha = c_1 + c_2 - \frac{5}{34}$$

$$(6) \qquad \dot{y}(0) = \beta = c_1 - 4c_2 + \frac{3}{34}$$

Lösung von $(5), (6)$ liefert $c_2 = \frac{\alpha-\beta}{5} + \frac{8}{170}$ und $c_1 = \frac{4\alpha+\beta}{5} + \frac{1}{10}$, Gauss–Alg.

b) Substitution: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot{x} = Ax + g(t)$, wobei
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ und $g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

c) Lösung durch Entkopplung, d.h. EWP von A:
$\lambda_1 = 1$ ud $\lambda_2 = -4$ mit $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$
$x_a(t) = x_h(t) + x_p(t)$, wobei
$x_h(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ die allgemeine Lösung des homogenen Dgl–syst
und $x_p(t) = \sin(t) \cdot \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \cos(t) \cdot \frac{1}{34} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ *eine* partikuläre Lösung des inhomogenen Systems.
Dazu brauchen Sie
$g_{\mathsf{neu}}(t) = T^{-1} g(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$, denn in Σ_{neu} gilt: $\dot{x}_{\mathsf{neu}} = D x_{\mathsf{neu}} + g_{\mathsf{neu}}(t)$, ausgeschrieben:

$$(7) \qquad \dot{x}_{1\mathsf{neu}} = x_{1\mathsf{neu}} + \frac{1}{5}\cos(t)$$

$$(8) \qquad \dot{x}_{2\mathsf{neu}} = -4x_{2\mathsf{neu}} - \frac{1}{5}\cos(t)$$

Für $(7), (8)$ muss je ein Ansatz *separat* gemäss Papula, p... gemacht werden, nämlich:

$$x_{1\mathsf{neu}_p} = a_1 \cdot \cos(t) + b_1 \cdot \sin(t) \qquad a_1, b_1 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in (7) liefert: $a_1 = -\frac{1}{10}$ und $b_1 = \frac{1}{10}$,
Einsetzen in (8) liefert: $a_1 = -\frac{4}{85}$ und $b_1 = -\frac{1}{85}$, also

$$\begin{aligned} x_{1\mathsf{neu}_p} &= -\frac{1}{10} \cdot \cos(t) + \frac{1}{10} \cdot \sin(t) \\ x_{2\mathsf{neu}_p} &= -\frac{4}{85} \cdot \cos(t) - \frac{1}{85} \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

und schliesslich

$$x_p(t) = T \cdot x_{\mathsf{neu}_p}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{34} \cdot \cos(t) & + & \frac{3}{34} \cdot \sin(t) \\ \frac{3}{34} \cdot \cos(t) & + & \frac{5}{34} \cdot \sin(t) \end{pmatrix},$$

was mit dem Resultat aus a) übereinstimmt.
Mit den gegebenen AB bekommt man hier genau dieselben c_1 und c_2, wie in a).

Lösung 2

a) EWP von A: $\lambda_{1.2} = 2 \pm j$, $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1-j \end{pmatrix} = \mu \left\{ u^{(1)} + j w^{(1)} \right\}$, wobei

$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ = Realteil und $w^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ = Imaginärteil von $v^{(1)}$,

siehe Behandlung komplexer Eigenwerte ($k = 1$).

$x_h(t) = 2e^{2t} \left\{ [a_1 \cos(t) - b_1 \sin(t)] u^{(1)} - [a_1 \sin(t) + b_1 \cos(t)] w^{(1)} \right\}$, $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$.

b) $x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \left\{ a_1 u^{(1)} - b_1 w^{(1)} \right\}$

Mit dem Gauss-Algorithmus: Endschema:

$2a_1$	$-2b_1$	1
1	0	1
.	-1	2

$\Longrightarrow a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 1$

c) $x_2(0.5) = e(\cos(0.5) + 3\sin(0.5))$

Lösung 3

a) $\lambda_{1.2} = \pm j$ mit $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} -1-j \\ 1 \end{pmatrix}$, also

$x_h(t) = 2\{[a_1 \cos(t) - b_1 \sin(t)] \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - [a_1 \sin(t) + b_1 \cos(t)] \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

b) $x(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) + \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$, $t \geq 0$.

Lösung 4

a) Substitution: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot{x} = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

b) EWP von A: $\lambda_{1.2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{23}}{2}$ mit $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, also

$x_h(t) = 2e^{\frac{1}{2}t}\{[a_1 \cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t) - b_1 \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t)] \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - [a_1 \sin(\frac{\sqrt{23}}{2}t) + b_1 \cos(\frac{\sqrt{23}}{2}t)] \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{23}}{2} \end{pmatrix}\}$

c) $x(t) \equiv 0$, $t \geq 0$.

d) Setze $\varepsilon := 10^{-8}$, d.h. wir haben jetzt die AB $x_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ und $b_1 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\sqrt{23}}$.

Mit anderen Worten: $|x(t)| \longrightarrow \infty$, da die Schwingung angeregt wird, (Dämpfung ist negativ!, d.h. eine Anregung).