MLAN4 Serie 5

Aufgabe 1

Gegeben sind die beiden Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ und damit die Matrix $B := x \cdot y^T$.
Bestimmen Sie die Eigenwerte von B mit dazugehöriger geometrischer Vielfachheit.
Geben Sie weiter die dazugehörigen Eigenvektoren an.

Tipp:

- Betrachten Sie die Fälle $(x, y) = x^T \cdot y \neq 0$ und $(x, y) = x^T \cdot y = 0$ separat.
- Betrachten Sie Vektoren v, die orthogonal zu y sind.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Differentialgleichung des gedämpften Harmonischen Oszillators:

(1) $$\ddot{y} + 0.5\,\dot{y} + y = 0 \qquad \text{mit den AB:} \quad y(0) = 1 \qquad \dot{y}(0) = 0$$

a) Schreiben Sie (1) um in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Allgemeine Lösung des Systems in a).

c) Spezielle Lösung mit den gegebenen AB.

d) Mit (**MATLAB**):
   - Graphische Darstellung von Ort und Geschwindigkeit je als Funktion der Zeit.
   - Geschwindigkeit als Funktion des Orts, d.h. horizontal: Ort und vertikal: Geschwindigkeit. (sog. *Trajektorie* in der Phasenebene)

Aufgabe 3 (MATLAB)

Bestimmen Sie mit Matlab das Vektorfeld des Differentialgleichungssystems obiger Aufgabe in der *Phasenebene*.
Phasenebene: horizontal Ort, vertikal Geschwindigkeit.
Stellen Sie in der selben Figur die oben gerechnete Lösung graphisch dar (sog. Phasenporträt).

Lösung 1

- 1. Fall: $(x, y) \neq 0$
  x ist EV zum EW $\lambda_1 = y^T \cdot x \neq 0$, algVF$\{\lambda_1\}$ = geomVF$\{\lambda_1\} = 1$.
  v ist EV zum EW $\lambda_2 = v^T \cdot y = 0$, d.h. $E_{\lambda=0} = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \middle| \, (v, y) = 0 \right\}$,
  algVF$\{\lambda_2\}$ = geomVF$\{\lambda_2\} = n - 1$.
- 2. Fall: $(x, y) = 0$
  x ist EV zum EW $\lambda_1 = \lambda = y^T \cdot x = 0$
  v ist EV zum EW $\lambda_2 = \lambda = v^T \cdot y = 0$, d.h. $E_{\lambda=0} = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \middle| \, (v, y) = 0 \right\}$,
  in diesem Fall ist $x \in E_{\lambda=0}$, also geomVF$\{\lambda\} = n - 1 <$ algVF$\{\lambda\} = n$.

Lösung 2

Substitution: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot{x} = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix}$

a) $\dot{x} = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix}$ mit der AB $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) EWP von A: $\lambda_{1.2} = -\frac{1}{4} \pm \omega_\delta$, wobei $\omega_\delta = \frac{\sqrt{15}}{4}$ mit $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, cf. Theorie.
   $x_h(t) = 2e^{\alpha_1 t}\{[a_1 \cos(\beta_1 t) - b_1 \sin]u^{(1)} - [a_1 \sin(\beta_1 t) + b_1 \cos(\beta_1 t)]w^{(1)}\}$, wobei $\alpha_1 = -\frac{1}{4}$, $\beta_1 = \omega_\delta$,
   $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ und $w^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_\delta \end{pmatrix}$

c) $a_1 = \frac{1}{2}$ und $b_1 = \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{\omega_\delta}$

d) Entsprechende Graphik mit `MATLAB`.

Lösung 3

Entsprechender `MATLAB` code.