MLAN4 Serie 6

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen mit einem Potenzreihen-Ansatz:

a) $y'(x) = y(x)$ mit der AB $y(0) = 1$.

b) $y''(x) + 2\,y'(x) = 0$ mit den AB $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

c) $y''(x) = -y(x)$ mit den AB $y(0) = y'(0) = 1$

Aufgabe 2 (MATLAB)

$$y'(x) = \frac{2x}{y^2} \qquad y(0) = 1 \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die analytische Lösung von (1).

b) Berechnen Sie im Intervall $[0,\,3]$ die Näherungslösung nach der Methode von *Euler* mit den Schrittweiten $h = 0.1$, $h = 0.01$ und $h = 0.001$.

c) Da Sie die exakte Lösung zur Verfügung haben, kann für jedes x_k der globale Fehler bestimmt werden. Stellen Sie den globalen Fehler für b) für verschiedene Werte von h graphisch dar (halblogarithmisch) und verifizieren Sie damit die Fehlerordnung der Methode.

Aufgabe 3 (MATLAB)

a) Lösen Sie das gegebene AWP (1) von Aufgabe 2 mit der Methode der *Taylorreihe* für welche die Rekursionsformeln der Koeffizienten c_k bis und mit zur Ordnung 4 hergeleitet werden sollen. Bestimmen Sie mit diesen c_k die Approximation der Lösung für $h = 0.2$, $h = 0.1$ und $h = 0.05$.

b) Da Sie die exakte Lösung zur Verfügung haben, kann für jedes x_k der globale Fehler bestimmt werden. Stellen Sie den globalen Fehler für a) für verschiedene Werte von h graphisch dar (halblogarithmisch) und verifizieren Sie damit die Fehlerordnung der Methode.

MLAN4 Lösungen Serie 6

Lösung 1

Ansatz: $y(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, einsetzen und anschliessender Koeffizientenvergleich

$y'(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\cdot a_k x^{(k-1)}$ und $y''(x)=\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot a_k x^{(k-2)}$

a) exakte Lösung: $y(x)=e^x$, Koeffizienten: $a_0=1$, $a_k=\frac{1}{k!}$

b) $y''(x)$ und $y'(x)$ in die Dgl einsetzen und Koeffizientenvergleich:

$$a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=-1,\ a_3=\frac{2}{3},\ a_4=-\frac{1}{3},\ a_5=\frac{2}{15},\ a_6=-\frac{1}{2}\frac{2^6}{6!},\ \ldots$$

exakte Lösung: $y(x)=(-\frac{1}{2})\cdot e^{-2x}+\frac{1}{2}$, Koeffizienten: $a_0=0$ und $a_k=(-1)^{k+1}\cdot\frac{2^{k-1}}{k!}$

c) exakte Lösung: $y(x)=\cos(x)+\sin(x)$, Koeffizienten: gerade Potenzen in x: $a_{2k}=(-1)^k\frac{1}{(2k)!}$ und ungerade Potenzen in x: $a_{2k+1}=(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}$

Lösung 2

a) Mit Hilfe der Separation: $y(x)=\sqrt[3]{3x^2+1}$

b) Euler: $y_{k+1}=y_k+h\cdot\frac{2x_k}{y_k^2}$

c) `MATLAB code`

Lösung 3

a) Taylorreihe: $y_{k+1}=y_k+c_1h+c_2h^2+c_3h^3+c_4h^4$ mit $x_{k+1}=x_k+h$ und $h=x_{k+1}-x_k$
eingesetzt: $(c_1+2c_2h+3c_3h^2+4c_4h^3+\ldots)\left[y_k+c_1h+c_2h^2+c_3h^3+c_4h^4+\ldots\right]^2=2(x_k+h)$
Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{rrcl}
h^0: \quad c_1y_k^2=2x_k & c_1 & = & \dfrac{2x_k}{y_k^2}\\
h^1: \quad 2c_2y_k^2+2y_kc_1^2=2 & c_2 & = & \dfrac{1}{y_k^2}(1-y_kc_1^2)\\
h^2: \quad 3c_3y_k^2+4c_2c_1y_k+2c_2c_1y_k+c_1^3=0 & c_3 & = & -\dfrac{1}{3y_k^2}(c_1^3+6c_1c_2y_k)\\
h^3: \quad 4c_4y_k^2+6c_3c_1y_k+2c_3c_1y_k+2c_2c_1^2+2c_2c_1^2+4c_2^2y_k=0 & c_4 & = & -\dfrac{1}{4y_k^2}(4c_1^2c_2+4c_2^2y_k+8c_1c_3y_k)
\end{array}$$

b) mit Hilfe von `MATLAB`.