MLAN4 Serie 7

Aufgabe 1 (MATLAB)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \tag{1}$$

einer ungedämpften Schwingung (sog. Harmonischer Oszillator) mit den AB $y(0) = \alpha$ und $\dot{y}(0) = \beta$.

a) Schreiben Sie (1) als System von Dgl erster Ordnung.

b) Lösen Sie das System in a) numerisch mit der Methode von Euler.

c) Stellen Sie in derselben Figur das Vektorfeld und die gerechnete Lösung graphisch dar (Phasenebene).

Da die Lösungen von a) bekannt sind, können Sie mit der exakten Lösung vergleichen.

d) Wie c) diesmal aber mit der exakten Lösung.

Was stellen Sie fest? Wie würden Sie Abhilfe schaffen?

Aufgabe 2 (MATLAB)

$$y'(x) = -2xy^2 \qquad y(x_0) = \alpha \tag{2}$$

a) exakte Lösung von (2)

b) Numerische Lösung mit Euler.

c) Grafik mit VF und gerechneter Lösung.

Der Benutzer will x_0, α, sowie x_{final} eingeben können. Anschliessend sollte die entsprechende Grafik hergestellt werden.

Aufgabe 3

$$y'(x) = -xy \qquad y(0) = 1 \tag{3}$$

a) exakte Lösung von (3).

b) Lösung mit einer Potenzreihe.

c) Wo darf die Konvergenzreihe aus b) benützt werden?

Aufgabe 4

$$\ddot{y} + 0.4\dot{y} + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad \dot{y}(0) = -1 \tag{4}$$

(4) soll numerisch mit der Methode der Taylorreihe gelöst werden. Entwickeln Sie die Lösung allgemein bis und mit c_p, $p \in \mathbb{N}$.

MLAN4 Lösungen Serie 7

Lösung 1

a) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot{x} = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$

b) `MATLAB code`

c) dito

d) $x_h(t) = 2\{[a_1 \cos(\omega_0 t) - b_1 \sin(\omega_0 t)]u^{(1)} - [a_1 \sin(\omega_0 t) + b_1 \cos(\omega_0 t)]w^{(1)}\}$,
wobei $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix}$. Mit den AB: $a_1 = \frac{\alpha}{2}$ und $b_1 = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{\beta}{\omega_0}$

Lösung 2

a) $y(x) = \frac{1}{x^2+1}$

b) $y_{k+1} = y_k + h(-2)x_k y_k^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

c) `MATLAB code`

Lösung 3

a) $y(x) = e^{(-\frac{x^2}{2})}$

b) Ansatz: $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $y'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{(k-1)}$. Mit der AB: $a_0 = 1$.
in (3) einsetzen und Koeffizientenvergleich: $a_{2k-1} = 0$ für $k = 1, 2, \ldots$
$a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{8}$, $a_6 = -\frac{1}{48}$, $a_8 = \frac{1}{384}$, $\ldots$
$y(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} - + \ldots$.
Mit der Substitution $z := -\frac{x^2}{2}$ erhatlten wir $1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - + \ldots$ was gerade der Exponentialreihe von e^z entspricht.

c) Konvergenzbereich der Exponentialreihe ist $\mathbb{R}$, z.B. mit dem Quotientenkriterium $\left(\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|\right)$.

Lösung 4

(4) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung: $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$,
wobei $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{y}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.4 \end{pmatrix}$ mit den AB $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$x_{k+1} = x_k + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots + c_p h^p$, $p \in \mathbb{N}$, wobei $c_j = \frac{1}{j!} A^j x_k$, $j = 0, 1, 2, \ldots, p$,
also $x_{k+1} = \left(I_2 + hA + \frac{h^2}{2!}A^2 + \frac{h^3}{3!}A^3 + \ldots + \frac{h^p}{p!}A^p\right) x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$