MLAN4 Serie 8

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung des gedämpften Harmonischen Oszillators:

$$\ddot{x} + 0.5\,\dot{x} + x = 0 \qquad \text{mit den AB:} \quad x(0) = 1 \qquad \dot{x}(0) = 0$$

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung um in eine System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) Approximieren Sie die Lösung von a) mit der Trapezmethode für $h = 0.5$.

Aufgabe 2 (MATLAB)

Zur approximativen Lösung des obigen AWP sollen die folgenden Methoden mit `MATLAB` programmiert werden:

a) verbesserter Polygonzug und Heun mit $p = 2$, explizite Einschritt-Methoden.

b) Trapez, implizite Einschritt-Methode.

c) Führen Sie mit jedem der drei Verfahren $n = 40$ Integrationsschritte mit der fixen Schrittweite $h = 0.2$ durch.

d) Vergleichen Sie die numerischen Lösungen mit der *exakten* Lösung (Handrechnung) und stellen Sie die absoluten Fehler graphisch dar.

Aufgabe 3 *Taylor–Entwicklungen*

Für den lokalen Diskrtetisationsfehler der verbesserten Polygonzugmethode (Euler) gilt

$$\begin{aligned}
(1) \qquad d_{k+1} &= y(x_{k+1}) - y(x_k) - h \cdot \left\{ f\left[x_k + \frac{h}{2}, y(x_k) + \frac{h}{2} f(x_k, y(x_k)) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{6} \cdot h^3 y^{(3)}(x_k) - \frac{1}{8} \cdot h^3 G(x_k, y(x_k)) + O(h^4) \\
(2) \qquad &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{4} G + F \cdot f_y \right\} h^3 + O(h^4)
\end{aligned}$$

Überprüfen Sie (1) mit Hilfe von Taylor–Entwicklungen für $y(x)$ und $f(x, y)$ mit dem Entwicklungszentrum $(x_0, y_0) := (x_k, y(x_k))$.

a) Entwicklung von $y(x_{k+1}) = \ldots$

b) Entwicklung von $f\left[x_k + \frac{h}{2}, y(x_k) + \frac{h}{2} f(x_k, y(x_k)) \right] = \ldots$

c) Einsetzen und Koeffizientenvergleich.

MLAN4 Lösungen Serie 8

Lösung 1

a) $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot{y} = Ay$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix}$

b) Trapezmethode: Intergration $\int\limits_0^t \ldots d\tau$ und Approximation der rechten Seite durch das arithmetische Mittel der beiden Funktionswerte links und rechts.
$y(t) - y(0) = \frac{t}{2}(Ay(t) + Ay(0)) \Longrightarrow y(t) = \left[I_2 - \frac{t}{2}A\right]^{-1}\left(I_2 + \frac{t}{2}A\right) y(0)$
speziell: $t = h = 0.5 : y(h) = \left[I_2 - \frac{h}{2}A\right]^{-1}\left(I_2 + \frac{h}{2}A\right) y(0) = \frac{1}{1+\frac{h}{4}+\frac{h^2}{4}} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} \\ -h \end{pmatrix}$

Lösung 2

`MATLAB code`

Lösung 3

a)

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2!}y''(x_k) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x_k) + O(h^4) \tag{3}$$

b) Taylor–Entwicklung für zwei Variablen:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \\ &\quad \frac{1}{2!}f_{xx}(x_0,y_0)(\Delta x)^2 + 2\frac{1}{2!}f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + \frac{1}{2!}f_{yy}(x_0,y_0)(\Delta y)^2 + O(h^3) \end{aligned} \tag{4}$$

Mit Hilfe von (4) und mit $\Delta x := \frac{h}{2}$, $\Delta y := \frac{h}{2}f(x_k, y(x_k))$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f\left[x_k + \frac{h}{2}, y(x_k) + \frac{h}{2}f(x_k,y(x_k))\right] &= f(x_k,y(x_k)) + \\ &\quad f_x(x_k,y(x_k)) \underbrace{\frac{h}{2}}_{\Delta x} + f_y(x_k,y(x_k)) \underbrace{\frac{h}{2}f(x_k,y(x_k))}_{\Delta y} + \\ &\quad \frac{1}{2}f_{xx}(x_k,y(x_k))\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \\ &\quad f_{xy}(x_k,y(x_k))\left(\frac{h}{2}\right)^2 f(x_k,y(x_k)) + \\ &\quad \frac{1}{2}f_{yy}(x_k,y(x_k))\left(\frac{h}{2}\right)^2 (f(x_k,y(x_k)))^2 + O(h^3) \end{aligned} \tag{5}$$

c) (3) und (5) in (1) einsetzen liefert die Behauptung (2).