MLAN4 Serie 9

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(1 + t)\,\dot{x} - \alpha\,x = 0 \qquad \text{mit} \quad x(0) = x_0. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von (1).

b) Lösen Sie (1) mit Hilfe einer Potenzreihe.

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Reihe in b).

Aufgabe 2 (MATLAB)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \tag{2}$$

einer ungedämpften Schwingung (sog. Harmonischer Oszillator) mit den AB $y(0) = \alpha$ und $\dot{y}(0) = \beta$.

a) Schreiben Sie (2) als System von Dgl erster Ordnung.

b) Lösen Sie das System in a) numerisch mit der Methode von Euler, diesmal aber *implizit*.

   Bemerkung 1 *impliziter Euler*

   Statt "Unter"–Summe wird jetzt die "Ober"–Summe verwendet, d.h. der Integrand wir am rechten Rand des Intervalls ausgewertet, also $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_{k+1}, y_{k+1})$.

c) Stellen Sie in derselben Figur das Vektorfeld und die gerechnete Lösung graphisch dar (Phasenebene).

Da die Lösungen von a) bekannt sind, können Sie mit der exakten Lösung vergleichen.

d) Wie c) diesmal aber mit der exakten Lösung.

Was stellen Sie fest? Vergleich zu Aufgabe 1 der Serie 7? Wie würden Sie Abhilfe schaffen?

Aufgabe 3 (MATLAB)

Betrachten Sie den gestörten *harmonischen Oszillator*

(3) $\ddot{x} + x = \varepsilon \cdot x^3 \qquad \varepsilon > 0$ klein, z.B. $\varepsilon = 10^{-2}$ oder $\varepsilon = 10^{-1}$

a) Stellen Sie für (3) das zugehörige *Vektorfeld* graphisch dar (mit dem `MATLAB` Befehl `quiver`) und zwar für

$$\begin{array}{rcccl} -10.5 & \leq & x_1 & \leq & 10.5 \\ -5.5 & \leq & x_2 & \leq & 5.5 \end{array} \quad \text{wobei} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & := & x \\ x_2 & := & \dot{x} \end{array}$$

Wählen Sie dabei *nicht allzu kleine* Inkremente.

b) Bestimmen Sie die Lösung von (3) für verschiedene AB:

$$\begin{array}{rcr} x(0) & = & -2\pi \\ \dot{x}(0) & = & 2.9 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} x(0) & = & -2\pi \\ \dot{x}(0) & = & 3.8 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} x(0) & = & -2\pi \\ \dot{x}(0) & = & 4.5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} x(0) & = & -2\pi \\ \dot{x}(0) & = & 5.5 \end{array}$$

Numerische Verfahren:

- Euler (explizit und implizit)
- Heun
- verbesserter Polygonzug
- Trapez.

Für dieses Beispiel haben Sie *keine* exakte Lösung zur Verfügung.

MLAN4 Lösungen Serie 9

Lösung 1

(1) ist separierbar: $\frac{dx}{x} = \alpha \cdot \frac{dt}{1+t}$

a) $x_h(t) = C \cdot (1+t)^\alpha$, $C \in \mathbb{R}$. Mit der AB: $C = x_0$, also $x(t) = x_0 \cdot (1+t)^\alpha$.

b) $a_k = x_0 \cdot \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k\cdot(k-1)\dots 1} =: x_0 \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix}$, cf. erster Test.

Also: $x(t) = x_0 \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} \cdot x^k$, sogenannte Binomialreihe, cf. Papula.

c) Mit dem Quotienten–Kriterium:

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)}{(\alpha-k)} \right| = 1$$

Lösung 2

a) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot{x} = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$

b) `MATLAB code`

c) dito

d) $x_h(t) = 2\{[a_1 \cos(\omega_0 t) - b_1 \sin(\omega_0 t)]u^{(1)} - [a_1 \sin(\omega_0 t) + b_1 \cos(\omega_0 t)]w^{(1)}\}$,

wobei $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix}$. Mit den AB: $a_1 = \frac{\alpha}{2}$ und $b_1 = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{\beta}{\omega_0}$

Lösung 3

`MATLAB code`