MND1
Serie 12

Aufgabe 1

Freier Fall mit linearem Reibungsgesetz:

Dgl. $m\,\dot{v} = m\,g - av \quad a > 0$ konstant, ('Reibung') $g =$ Erdbeschleunigung $\quad v = v(t) \quad$ AB: $v(0) = 0$

a) Gesucht ist die Lösung dieses AWP, also $v = v(t)$.

b) Stationäres Verhalten von $v(t)$, d.h. $v(t) \longrightarrow$? für $t \longrightarrow \infty$, graphische Darstellung von $v(t)$.

Aufgabe 2

Bei welchen Kurven ist in jedem Punkt P die Steigung der Tangente

a) gleich der Steigung der Verbindungsgeraden von P mit dem Ursprung?

b) gleich dem Quadrat der Steigung dieser Verbindungsgeraden?

Aufgabe 3

$$\text{Dgl.} \quad \dot{y} - t \cdot y + 2y = g(t) \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \le t \le 2 \\ t-2 & \text{falls } 2 \le t \end{cases} \qquad \text{AB: } y(0) = 1$$

a) Graphische Darstellung der Anregung $g(t)$.

b) Bestimmen Sie die *stetige* Lösung $y(t)$ des gegebenen AWPs.

Aufgabe 4

$j := \sqrt{-1}$, imaginäre Einheit.

a) Drücken Sie Re$(\cosh(jt) + \sinh(jt)) =$? durch die gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen aus.

b) Drücken Sie $\sin(jx) =$? $\quad \cos(jx) =$? durch die hyperbolischen Funktionen $\sinh(.)$ bzw. $\cosh(.)$ aus.

c) Betrachten Sie mit Hilfe von b) das gewöhnliche Additionstheorem

$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

im komplexen Fall für $\cos(jx - jy) =$?

Aufgabe 5

Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen an.

a) $y'(x) + 5 \cdot y(x) = e^{4x}$ b) $y'(x) - 4 \cdot y(x) = e^{4x}$

Bestimmung der partikulären Lösung wie folgt:

1. Ansatz vom Typ der rechten Seite (d.h. Tabelle Papula, u.a.)
2. Variation der Konstanten

Aufgabe 6

Lösen Sie folgende inhomogene Differentialgleichungen.
Verwenden Sie dabei *Ansätze vom Typ der rechten Seite*.

a) $y'(x) - 2 \cdot y(x) = 1 + x^2$

b) $y'(x) - 3 \cdot y(x) = e^x \cdot \cos(x)$

c) $y'(x) + y(x) = \sin(x) + e^{-5x}$

Aufgabe 7

Die lineare inhomogene Differentialgleichung $1-$ ter Ordnung $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x)$ hat unter anderen die Lösungen $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{-x}$.

a) Wie lautet die allgemeine Lösung?

b) Wie lautet die Differentialgleichung?

Tipp: Superposition

Der Witz ist, dass a) wirklich *vor* b) gelöst werden kann!

Lösung 1

Es handelt sich um eine separierbare Differentialgleichung:

$$\frac{dv}{g - \frac{a}{m} \cdot v} = dt$$

a) $v(t) = \frac{mg}{a} + c \cdot e^{-\frac{a}{m}t}$, $c \in \mathbb{R}$ mit $v(0) = 0$ erhalten wir $c = -\frac{mg}{a}$ und schliesslich $v(t) = \frac{mg}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{m}t}\right)$.

b) $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = \frac{mg}{a} =$ konstant! $v = \frac{mg}{a}$ ist horizontale Asymptote.

Lösung 2

Punkt $P(x, y)$. Sie erhalten je eine separierbare Differentialgleichung.

a) Differentialgleichung: $y' = \frac{y}{x}$ mit den Lösungen: Ursprungsgeraden $y(x) = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$.

b) Differentialgleichung: $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2$ mit den Lösungen: $y(x) = \frac{x}{1 + c \cdot x}$, $c \in \mathbb{R}$.

Lösung 3

a) Grafik, stückweise linear.

b) $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-2t}$ für $0 \leq t \leq 2$ und $y(t) = (1 + e^2) \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-2t} - 1$ für $2 \leq t$.

Lösung 4

a) $\cos(t)$

b) $\sin(jx) = j \cdot \sinh(x)$ und $\cos(jx) = \cosh(x)$

c) $\cos(jx - jy) = \cosh(x - y) = \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)$,
cf. die entsprechenden Additionstheoreme für die Hyperbelfunktionen.

Lösung 5

a) $y_a(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{-5x} + \frac{1}{9} \cdot e^{4x}$, $C \in \mathbb{R}$.

b) $y_a(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{4x} + x \cdot e^{4x}$, $C \in \mathbb{R}$. Fall der "Resonanz"

Lösung 6

a) $y_p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ und damit: $y_a(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)$, $C \in \mathbb{R}$.

b) $y_p(x) = e^x \cdot (c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x))$ und damit:
$y_a(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{3x} + \frac{1}{5} \cdot (\sin(x) - 2 \cdot \cos(x))$, $C \in \mathbb{R}$.

c) $y_p(x) = c_p \cdot e^{-5x}$, einsetzen liefert $C_p = -\frac{1}{4}$
und für den ersten Teil: $y_p(x) = (c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x))$, einsetzen liefert $c_1 = -\frac{1}{2}$ und $c_2 = -c_1 = \frac{1}{2}$, also insgesamt:
$y_a(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} \cdot (\sin(x) - \cos(x)) - \frac{1}{4} e^{-5x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Lösung 7

a) $y_a(x) = y_h(x) + y_p(x)$, wobei hier $y_h(x) = C \cdot (y_1(x) - y_2(x))$, $C \in \mathbb{R}$,
da y_1 als auch y_2 je eine Lösung des inhomogenen Problems ist! $y_p(x) = y_1(x)$, z.B.,
also $y_a(x) = C \cdot (y_1(x) - y_2(x)) + y_1(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

b)
$$a(x) = -\frac{\cosh(x)}{\sinh x} = -\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \qquad b(x) = e^x \cdot (1 + a(x)) = -\frac{1}{\sinh(x)} = e^x \cdot \frac{(-2)}{e^{2x} - 1}$$