MND1
Serie 13

Aufgabe 1

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x) - y(x) = 0. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die Isoklinen von (1).

b) Bestimmen Sie das Richtungsfeld von (1).

c) Stellen Sie verschiedene Lösungen in b) graphisch dar.

d) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien der Lösungen von (1).

e) Stellen Sie verschiedene Orthogonaltrajektorien aus d) graphisch dar.

Aufgabe 2

Prüfen Sie nach, ob die folgenden Funktionenpaare eine Fundamentalbasis der Lösungen bilden:

a) $y_1(x) = \sin(\omega x)$ und $y_2(x) = \cos(\omega x)$

b) $y_1(x) = \sin(x)$ und $y_2(x) = \sin(x+1)$

c) $y_1(x) = e^x \cdot \cos(x)$ und $y_2(x) = e^x \cdot \sin(x)$

Aufgabe 3

Gegeben ist

$$z = e^{\frac{x}{x+j}} \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Gesucht sind der Realteil sowie der Imaginärteil von (2).

Aufgabe 4

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$3\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0 \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (3).

b) Bestimmen Sie die Lösung von (3) für die AB $y(0) = \alpha$ und $\dot{y}(0) = \beta$.

c) Schreiben Sie (3) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Aufgabe 5

Prüfen Sie nach, ob die folgenden Funktionen eine Fundamentalbasis der Lösungen bilden:

a) $y_1(x) = \sinh(x)$, $y_2(x) = \cosh(x)$ und $y_3(x) = e^x$

b) $y_1(t) = e^{-2t}$, $y_2(t) = e^t$ und $y_3(t) = e^{2t}$

c) $y_1(x) = \cos(x)$, $y_2(x) = \sin(x)$ und $y_3(x) = \sin(x+1)$

d) Falls die gegebenen Funktionen linear unabhängig sind: wie müsste die zugehörige Differentialgleichung aussehen?

Aufgabe 6

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \delta\dot{y} + y = 0 \qquad \text{für} \quad 0 < \delta < 2. \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (4).

b) Bestimmen Sie die Lösung mit folgenden AB: $y(0) = \alpha$ und $\dot{y}(0) = \beta$.

c) Wohin streben die Lösungen für $t \to \infty$?

MND1 Lösungen Serie 13

Lösung 1

a) $y = k$, Geraden parallel zur $x-$ Achse.

b) Grafik

c) $y_H(x) = c \cdot e^x$, $c \in \mathbb{R}$.

d) Dgl. der Orthogonaltrajektorien lautet $y'(x) = -\frac{1}{y(x)}$ mit den Lösungen: $y_H^2(x) = -2x + 2C$, $C > 0$, liegende, nach links geöffnete Parabeln.

e) Grafik

Lösung 2

$y_1(x)$ und $y_2(x)$ bilden genau dann eine FB, falls die Wronski-Determinante verschieden Null ist:

a) $\begin{vmatrix} \sin(\omega x) & \cos(\omega x) \\ \omega\cos(\omega x) & -\omega\sin(\omega x) \end{vmatrix} = -\omega \neq 0$ b) $\begin{vmatrix} \sin(x) & \sin(x+1) \\ \cos(x) & \cos(x+1) \end{vmatrix} = -\sin(1) \neq 0$

c) $\begin{vmatrix} e^x \cdot \cos(x) & e^x \cdot \sin(x) \\ e^x(\cos(x) - \sin(x)) & e^x(\cos(x) + \sin(x)) \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$

Lösung 3

$$\text{Re}(z) = e^{\frac{x^2}{(x^2+1)}} \cdot \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \qquad \text{Im}(z) = -e^{\frac{x^2}{(x^2+1)}} \cdot \sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

Lösung 4

a) charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{3} = 0$, mit den Lösungen $\lambda_{1.2} = \frac{1}{3} \pm j\,\frac{\sqrt{2}}{3}$, somit $y_h(t) = e^{\frac{1}{3}t} \cdot \left(c_1 \cos(\frac{\sqrt{2}}{3}t) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{2}}{3}t)\right)$, Fall zwei der Diskussion.

b) $c_1 = \alpha$ und $c_2 = \frac{3\beta - \alpha}{3\omega}$, wobei $\omega = \frac{\sqrt{2}}{3}$

c) $\dot{z} = Az$, wobei $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ mit $z_1 := y$ und $z_2 := \dot{y}$, sowie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Lösung 5

Allgemein: Wronski-Determinante $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}$ bzw. $\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \dot{y}_3(t) \\ \ddot{y}_1(t) & \ddot{y}_2(t) & \ddot{y}_3(t) \end{vmatrix}$

a) Wronski-Determinante $= 0$, d.h. die gegebenen Funktionen sind linear abhängig.

b) Wronski-Determinante $= 12 \cdot e^t \neq 0$, d.h. die gegebenen Funktionen sind linear unabhängig.

c) Wronski-Determinante $= 0$, d.h. die gegebenen Funktionen sind linear abhängig.

d) Lineare Differentialgleichung dritter Ordnung.
Für den Fall b) gilt: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$, also lautet die charakteristische Gleichung
$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
und die Dgl. schliesslich: $\dddot{y} - \ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$

Lösung 6

Diese Difrerentialgleichung beschreibt einen freien gedämpften Oszillator.
$a_1 = \delta$ und $a_0 = 1$, δ so, dass der letzte der drei möglichen Fälle in Frage kommt.

a) $\lambda_{1.2} = -\frac{\delta}{2} \pm j\omega_\delta$, wobei $\omega_\delta = \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4}}$
$y_h(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \cdot (c_1 \cdot \cos(\omega_\delta\, t) + c_2 \cdot \sin(\omega_\delta\, t))$

b) $c_1 = \alpha$, $c_2 = \frac{1}{\omega_\delta}(\beta + \frac{\delta}{2}\alpha)$

c) $\lim_{t\to\infty} y_h(t) = 0$, da $e^{-\frac{\delta}{2}t} \to 0$ für $t \to \infty$