MND2 Serie 1

Aufgabe 1

Lösen Sie die folgenden separierbaren Differentialgleichungen:

a) $y' = \frac{x^2}{y}$

b) $y' + y^2 \cdot \sin(x) = 0$

c) $x \cdot y' = \sqrt{1 - y^2}$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{1 + e^y}$

Aufgabe 2

Gegeben ist das Anfangswertproblem (AWP)

$$y' = \frac{2 - e^x}{3 + 2y} \qquad y(0) = 0$$

Wo nimmt die Lösung ihren maximalen Wert an?

Aufgabe 3

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\psi(x)} \cdot \frac{du}{dx}\right) = 0 \qquad \psi(x) = \alpha \cdot x \qquad \alpha > 0$$

mit den Randbedingungen $u(-h) = 0$ und $u(h) = 1$.
Es handelt sich hier um ein sogenanntes Randwertproblem (RWP).

Gesucht sind $u = u(x)$ und $J = J(x) = e^{\psi(x)} \cdot \frac{du}{dx}$
Stellen Sie $u(x)$ für verschiedene Werte von α graphisch dar. Wählen Sie dabei $h = 1$.

Aufgabe 4

Ein Wurm, der pro Sekunde $1\,\text{cm}$ zurücklegt, befindet sich zur Zeit $t = 0$ am linken (befestigten) Ende eines Gummiseils von zunächst $1\,\text{m}$ Länge und macht sich auf den Weg zum rechten Ende. Gleichzeitig wird das Seil von rechts her pro Sekunde um $1\,\text{m}$ in die Länge gezogen. Wird der Wurm sein Ziel erreichen, und wenn ja, wie lange braucht er dazu?

Aufgabe 5

a) Lösen Sie die Gleichung $\ln(2x + \sqrt{2}) - \sinh^{-1}(2x) = 0$.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} \tanh(x)$.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} + 4x = \sin(2t) + t^2$.

Aufgabe 7

Freier Fall mit quadratischer Reibung: $m \cdot a = mg - k \cdot v^2$ und AB: $v(0) = 0$

Gesucht:

a) $v = v(t)$

b) stationäres Verhalten von $v(t)$, d.h. $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) =$? (cf. MND1 Serie 14, Aufgabe 5)

Aufgabe 8

$$\text{Dgl.} \quad a\dot{x} + x = k \cdot s(t) \quad a, k > 0 \qquad s(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq t < t_0 \\ A & \text{falls } t_0 \leq t \end{cases} \qquad \text{AB: } x(0) = x_0$$

a) Graphische Darstellung von $y = s(t)$.

b) Bestimmen Sie die *stetige* Lösung des gegebenen Problems.

c) Bestimmen Sie die stationäre Lösung, d.h. $x_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.

d) Für welche t weicht $x(t)$ um weniger als $\varepsilon > 0$ von x_∞ ab?

MND2 Lösungen Serie 1

Lösung 1

a) $y_h(x) = \pm\sqrt{2\left(\frac{x^3}{3}+c\right)}$, $c \in \mathbb{R}$

b) $y_h(x) = -\frac{1}{\cos(x)+c}$, $c \in \mathbb{R}$

c) $y_h(x) = \sin(\ln|x|+c)$, $c \in \mathbb{R}$

d) $y + e^y = \frac{x^2}{2} + e^{-x} + c \Longrightarrow y_h(x) = \ldots$ ist nicht mehr elementar möglich.

Lösung 2

$$y_{h(1.2)} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 2x - e^x + c} \qquad c \in \mathbb{R}$$

AB: $y(0) = 0 \Longrightarrow c = 1$ mit dem oberen Vorzeichen $+$, also

$$y(x) = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{13}{4} + 2x - e^x} \qquad 0 \le x \le x_{\text{final}}$$

wobei x_{final} = Nullstelle der Differenz unter der Wurzel (eine nicht–lineare Gleichung ist zu lösen).
$y(x)$ ist dann maximal, falls die Differenz unter der Wurzel maximal ist, also:

$$d(x) := \frac{13}{4} + 2x - e^x \qquad d'(x) = 2 - e^x \overset{!}{=} 0 \qquad x = \ln(2)$$

und damit $y_{\text{max}} = y(\ln(2)) = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + 2\cdot\ln(2)} \approx 0.124$

Lösung 3

$$u(x) = \frac{e^{\alpha h} - e^{-\alpha x}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} = \frac{e^{\alpha h} - e^{-\alpha x}}{2\cdot\sinh(\alpha h)} \qquad J(x) = \frac{\alpha}{2\cdot\sinh(\alpha h)} = \text{konstant!}$$

$$u'(-h) = \frac{\alpha}{1 - e^{-2\alpha h}} \qquad u'(h) = \frac{\alpha}{e^{2\alpha h} - 1}$$

Die Tangentensteigung ist im linken Randpunkt $(-h,\,0)$ sehr gross für α gross und im rechten Randpunkt $(h,\,1)$ ist sie sehr klein für α gross.

Lösung 4

Die Geschwindigkeit des Wurms setzt sich zusammen aus

- Geschwindigkeit des Wurms relativ zum Seil $1\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0.01\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
- Geschwindigkeit, mit der er mitgezogen wird:
  - i) zur Zeit $t > 0$: Position des Wurms $x(t)$, Länge des Seils $l(t)$.
  - ii) zur Zeit $t + \Delta t$: Position des Wurms $x(t) + \Delta x$, Länge des Seils $l(t) + \Delta l$
  - iii) Dehnung des Seils (Material homogen): $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta l}{l}$
  - iv) Multiplikation obiger Gelichung mit $\frac{x}{\Delta t}$ liefert: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{\Delta t}\cdot\frac{x}{l}$
  - v) Der Wurm wird mit $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\frac{x(t)}{l(t)}$ mitgezogen.

Es gilt: $l(t) = (t+1) \cdot l_0$, wobei $l_0 = 1$m und t hier nur als Skalar zu verstehen ist.

Die Differentialgleichung lautet somit:

$$\dot{x}(t) = 0.01 + \frac{1}{1+t} \cdot x(t) \qquad \text{AB:} \quad x(0) = 0 \tag{1}$$

(1) ist inhomogen, separierbar: $x_a(t) = x_h(t) + x_p(t)$, Variation der Konstanten!

$$x_h(t) = C \cdot (1+t) \quad x_p(t) := C(t) \cdot (1+t) \Longrightarrow C(t) = 0.01 \cdot \ln(1+t)$$

also

$$x_a(t) = C \cdot (1+t) + 0.01 \cdot \ln(1+t) \cdot (1+t) \qquad C \in \mathbb{R}.$$

AB: $\Longrightarrow C = 0$.

Lösung: $x(t) = 0.01 \cdot (t+1) \cdot \ln(t+1)$. Er erreicht sein Ziel nach $t = e^{100} - 1 \approx 8.525 \cdot 10^{35}$ Jahren.

Lösung 5

a) $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ und daraus $\sinh^{-1}(2x) = \ln(2x + \sqrt{2x^2+1})$,
also $\ln(2x + \sqrt{2}) = \ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) \Longrightarrow 2x + \sqrt{2} = 2x + \sqrt{4x^2+1}$
und schliesslich $x = \pm\frac{1}{2}$, Verifikation der Lösungen, denn es wurde quadriert!

b) Mit Ausklammern von e^x:
$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$, $\Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) = 1.$

Lösung 6

$x_a(t) = x_h(t) + x_p(t)$, wobei $x_h(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$ und $x_p(t) = -\frac{t}{4} \cdot \cos(2t) + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8}$

Lösung 7

$a = \frac{dv}{dt}$ = Beschleunigung und damit:

$$\frac{dv}{dt} = \left(g - \frac{k}{m} \cdot v^2\right) \Longrightarrow \frac{dv}{\left(g - \frac{k}{m} \cdot v^2\right)} = dt \Longrightarrow \int \frac{dv}{\left(g - \frac{k}{m} \cdot v^2\right)} = t + C$$

Mit Hilfe der PBZ:

$$\frac{1}{\left(g - \frac{k}{m} \cdot v^2\right)} = \frac{A}{\left(\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot v\right)} + \frac{B}{\left(\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot v\right)} \Longrightarrow A = B = \frac{1}{2\sqrt{g}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{\left(g - \frac{k}{m} \cdot v^2\right)} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \left\{ \ln\left|\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot v\right| - \ln\left|\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot v\right| \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \ln\left|\frac{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot v}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot v}\right| \end{aligned}$$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot v}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot v}\right| = 2 \cdot \sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot (t + C) \Longrightarrow \frac{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot v}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot v} = e^{2 \cdot \sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot (t+C)}$$

Auflösung nach v liefert $\left(\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$:

a) $v_h(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot (t + C)\right)$, $v(0) = 0 \Longrightarrow C = 0$.

b) $v_{\text{stat}} = \lim\limits_{t \to \infty} \sqrt{\frac{mg}{k}} =$ endlich!

Lösung 8

Es handelt sich hier um die Sprungantwort eines Systems:

a) Graphik

b) $x(t) = x_0 \cdot e^{-\frac{1}{a}\,t}$, falls $0 \leq t \leq t_0$
$x(t) = (x_0 - kA \cdot e^{\frac{1}{a}\,t_0}) \cdot e^{-\frac{1}{a}\,t} + kA$, falls $t \geq t_0$

c) $x_\infty = kA$

d) $t > a \cdot \ln \frac{\left|x_0 - kA \cdot e^{\frac{1}{a}\,t_0}\right|}{\varepsilon}$