MND2 Serie 3

Aufgabe 1

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{y} + 2y = g(t) \qquad y(0) = 0$$

wobei die Inhomogenität wie folgt gegeben ist:

$$g(t) = \begin{cases} 1\,, & 0 \le t \le 1 \\ 0\,, & 1 < t \end{cases}$$

Aufgabe 2

Consider a population $P = P(t)$ with constant relative birth and death rates α and β, respectively, and a constant emigration rate m, where α, β, m are positive constants. Assume that $\alpha > \beta$. Then the rate of change of the population at time t is modeled by the the differential equation

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P - m \qquad \text{where} \quad k := \alpha - \beta. \tag{1}$$

a) Find the solution of (1) with initial condition $P(0) = P_0$.

b) What condition on m will lead to an exponential growth of the population?

c) What condition on m will result in a constant population? ... in a decline of the population?

d) In 1847, the population of Ireland was about 8 Million people and the difference between α and β was 1.6% of the population. Because of the potato famine in the 1840s and the 1850s, about $210'000$ people of Ireland emigrated per year. Was the population expanding or declining during that time?

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$, wobei

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Lösen Sie die entsprechenden Systeme durch Entkopplung.
- Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{neu}
- Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{e}

Aufgabe 4

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -16y_1 - 17y_2 - 18y_3 \\ \dot{y}_2 &= 6y_1 + 7y_2 + 6y_3 \\ \dot{y}_3 &= 9y_1 + 9y_2 + 11y_3 \end{aligned}$$

a) Entkoppeln Sie das Differentialgleichungssystem.

b) Geben Sie die allg. Lösung an.

c) Lösen Sie das auftretende EWP auch mit MATLAB, Vergleich?

Aufgabe 5

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$y_A(x) = 0.8 \cdot \sin(x) + e^{-x} \cdot \{a \cdot \cos(0.3x) + b \cdot \sin(0.3x)\}.$$

Rekonstruieren Sie die Differentialgleichung.

Aufgabe 6

Lösen Sie das folgende AWP: $\dot{y} = Ay + g(t)$, wobei $A =$ System-Matrix der Aufgabe 2 dieser Serie und

$g(t) = t^2 \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$ für die AB $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Lösung mit EWP von A gemäss Lin.Alg.

b) Lösung numerisch mit MATLAB.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Lösung $y(t)$ der Dgl. $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = f(t)$ für die AB $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$ für alle Zeiten $t \geq 0$. $f(t)$ ist stückweise linear

und dabei wie folgt gegeben: $f(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{falls} \quad t \leq 0 \\ \text{monoton steigend zwischen Null und } \frac{\pi}{2} \quad \text{falls} \quad 0 \leq t \leq \pi \\ \text{konstant} = \frac{\pi}{2} \quad \text{falls} \quad t \geq \pi \end{cases}$

a) graphische Darstellung von $f(t)$

b) $y(t)$ und $\dot{y}(t)$ müssen auf dem ganzen Zeitbereich stetig sein.

c) Stellen Sie die Anregung $f(t)$ und die Systemantwort $y(t)$ in zwei übereinander stehenden Figuren mit der gleichen Skalierung der $t-$ Achsen graphisch dar.

Aufgabe 8

a) Bestimmen Sie eine neue Basis Σ_{neu} bestehend aus b_1 und b_2 so, dass $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ diagonalisiert wird. Für welche Werte von μ ist die Diagonalisierung überhaupt möglich?

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $\dot{y} = Cy$.

c) Betrachten Sie das Vektorfeld, Phasenporträt (MATLAB).

MND2 Lösungen Serie 3

Lösung 1

$y = y(t)$ muss stetig sein!

- $0 \le t \le 1$: $y_a(t) = y_h(t) + y_p(t) = c \cdot e^{-2t} + \frac{1}{2}$, AB $c = -\frac{1}{2} \Longrightarrow y(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)$
- $1 < t$: neue AB: $y(1) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right)$ für $y_h(t) = c \cdot e^{-2t}$, $c \in \mathbb{R}$.
  also $y(1) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right) = c \cdot e^{-2} \Longrightarrow c = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$ und schliesslich

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right) \cdot e^{-2t} \qquad 1 < t$$

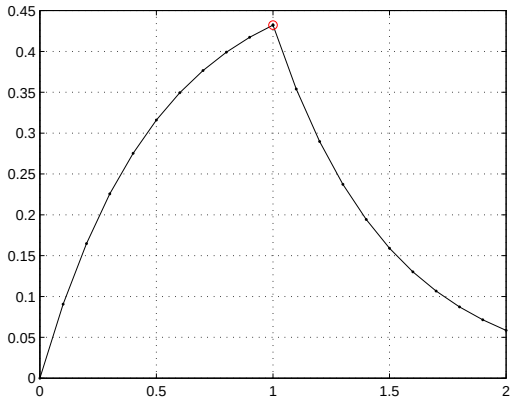

Abbildung 1: stetige Lösung $y(t)$, $0 \le t \le 2$, Anregung $g(t)$ mit Sprung bei $t = 1$
`MND2_fig_serie3_aufg1.m`

Lösung 2

a) $P_a(t) = P_h(t) + P_p(t)$, $P_h(t) = c \cdot e^{kt}$ und $P_p(t) =$ constant

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{m}{k}\right) \cdot e^{kt} + \frac{m}{k} \qquad k = \alpha - \beta \qquad 0 \le t$$

b) $\left(P_0 - \frac{m}{k}\right) > 0 \Longrightarrow m < kP_0$

c) $\left(P_0 - \frac{m}{k}\right) = 0 \Longrightarrow m = kP_0$ bzw. $\left(P_0 - \frac{m}{k}\right) < 0 \Longrightarrow m > kP_0$

d) Ireland 1847: , $P_0 = 8$ Millionen, $k = \alpha - \beta = 0.016$, $m = 0.21$ Millionen
$\left(P_0 - \frac{m}{k}\right) = \left(8 - \frac{0.21}{0.016}\right) = 8 - 13.13 < 0$, i.e. the population is declining
$(P(t_0) = 0 \Longrightarrow t_0 = 58.8$ years!)

Lösung 3

Es ist je ein EWP zu lösen.

a) $\lambda_{1.2} = 3 \pm \sqrt{2}$ mit den EV $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$,

d.h. die allgemeine Lösung ist $x_H(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} \cdot v^{(2)}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) $\lambda_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ mit den EV $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = v^{(1)^\star}$,

d.h. die allgemeine Lösung ist

$$x_H(t) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \left\{ \left(a_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - b_1 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \right) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \left(a_1 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + b_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \right) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

In a) handelt es sich um einen auslaufenden Knoten.

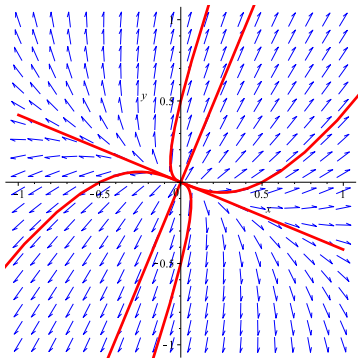

Abbildung 2: Phasenporträt von $\dot{x} = Ax$
`phasenportraet_1.mws`

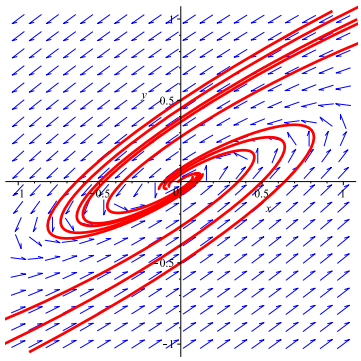

Abbildung 3: Phasenporträt von $\dot{x} = Ax$
`phasenportraet_1.mws`

In b) handelt es sich um einen einlaufenden Fokus, cf. gedämpfte Schwingung.
Die Grafik ist am elegantesten mit dem Maple-File `phasenportraet_1.mws` in meinem Public zu haben.

Lösung 4

a) $\lambda_1 = -1$ mit $E_{-1} = span\left\{\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$, $\lambda_2 = 1$ mit $E_1 = span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$
und $\lambda_3 = 2$ mit $E_2 = span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$,
$D = T^{-1}AT$, wobei $T = \left(v^{(1)}\ v^{(2)}\ v^{(3)}\right)$ spaltenweise.

b) $y_h(t) = c_1 e^{-t} v^{(1)} + c_2 e^{t} v^{(2)} + c_2 e^{2t} v^{(3)}$, c_1, c_2 und $c_3 \in \mathbb{R}$

c) `[T, D] = eig(A)`, wobei in `T` die EV o.n.

Lösung 5

Die Differentialgleichung lautet

$$y''(y) + 2 \cdot y'(x) + 1.09 \cdot y(x) = 1.6 \cdot \cos(x) + 0.072 \cdot \sin(x)$$

Lösung 6

a) $y_a(t) = y_h(t) + y_p(t)$, $y_h(t)$ aus Aufgabe 2 und $y_p(t) = (t^2 - 2t + 2) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit entsprechenden Ansätzen.
Hier ist es einfacher, y_p in der neuen Basis Σ_{neu} zu bestimmen. (Die Anregung ist ein Vielfaches eines EV)

Mit den AB erhalten wir $c_1 = -2$, $c_2 = 1$ und $c_3 = -2$.

b) analog zu Aufgabe 2.

Lösung 7

a) $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & 0 \le t \le \pi \\ \frac{\pi}{2} & t \ge \pi \end{cases}$ Graphik

b) $y(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{25}\cos(2t) - \frac{3}{100}\sin(2t)\right) - \frac{1}{25} + \frac{1}{10}t$ für $0 \le t \le \pi$

Stetigkeitsbedingungen: $y(\pi) = \frac{1}{25}(e^{-\pi} - 1) + \frac{\pi}{10}$ und $\dot{y}(\pi) = \frac{1}{10}(1 - e^{-\pi})$ und damit:
$y(t) = e^{-t}\left(\frac{e^{\pi}}{25}(e^{-\pi} - 1)\cos(2t) + \frac{3e^{\pi}}{100}(1 - e^{-\pi})\sin(2t)\right) + \frac{\pi}{10}$ für $t \ge \pi$

c) Graphen mit Hilfe von `MATLAB`.

Lösung 8

a) EWP von C: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = \mu$, EV: $v^{(1)} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\mu \end{pmatrix}$. C ist diagonalisierbar, falls $\mu \neq 1$

b) $\mu \neq 1$: $y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} v^{(2)}$, c_1 und $c_2 \in \mathbb{R}$

$\mu = 1$: $y_h(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

c) mit `quiver`, analog `vektorfeld1.m`

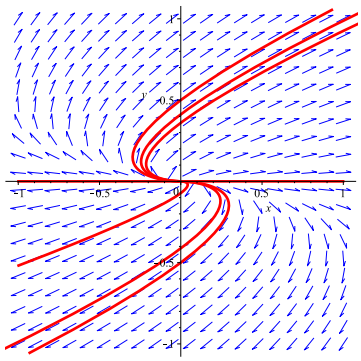

Abbildung 4: Phasenporträt von $\dot{y} = Cy$, $\mu = \frac{3}{2}$, C diagonalisierbar
`phasenportraet_1.mws`

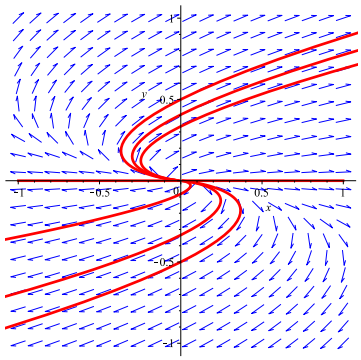

Abbildung 5: Phasenporträt von $\dot{y} = Cy$, $\mu = 1$, C nicht diagonalisierbar
`phasenportraet_1.mws`