

MND2 Serie 4

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen mit einem Potenzreihen-Ansatz:

- a) $y'(x) = y(x)$ mit der AB $y(0) = 1$.
- b) $y''(x) + 2y'(x) = 0$ mit den AB $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.
- c) $y''(x) = -y(x)$ mit den AB $y(0) = y'(0) = 1$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 3x_2 \end{cases} \quad \text{mit den AB:} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie $x_1(t)$ für $t = 0.5$ und allgemein für $t > 0$.

Aufgabe 3

Lösen Sie das folgende lineare AWP mit einem Potenzreihen-Ansatz.

$$\ddot{s}(t) + t^2 s(t) = 0 \quad \text{AB: } s(0) = 0 \quad \dot{s}(0) = 1$$

Geben Sie die ersten vier nicht verschwindenden Terme der Entwicklung an.

Aufgabe 4

Ein lineares System transformiert das Eingangssignal $x(t)$ in das Ausgangssignal $y(t)$, wobei

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t \end{cases}$$

und die beiden Signale die Differentialgleichung

$$(1) \quad \dot{y}(t) + \frac{1}{2} \cdot y(t) = x(t)$$

erfüllen.

- a) Stellen Sie $x(t)$ graphisch dar.
- b) Bestimmen Sie die Lösung von (1) mit der AB $y(0) = 1$. $y(t)$ soll stetig sein, für *alle* $t \in \mathbb{R}$.
- c) Graphische Darstellung von $y(t)$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(2) \quad y'''(x) - 2 \cdot y''(x) + 2 \cdot y'(x) = 0$$

- Schreiben Sie (2) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.
- Lösen Sie das System in a) durch Entkopplung.

Aufgabe 6

Gegeben ist ein Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$, wobei

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Lösen Sie die entsprechenden Systeme durch Entkopplung.
- Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_{neu}
- Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl. Σ_e

Aufgabe 7

In einem englischen Schloss gibt es einen Tisch, an dem angeblich König Arthur um ca. 500 n. Chr. mit seiner Tafelrunde gebechert hat. Eine Untersuchung des Holzes ergab eine ^{14}C -Aktivität von 91% der Aktivität lebenden Holzes, (Die Halbwertszeit von ^{14}C Atome beträgt 5730 ± 40 Jahre). Was folgt daraus?

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten niedrigster Ordnung, die die folgende Lösung hat:

- $y_1(x) = x \cdot e^{2x}$
- $y_1(x) = \sin(3x)$

Aufgabe 9

Welche inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten niedrigster Ordnung hat als allgemeine Lösungen die folgende Funktion?

- $y_a(x) = c \cdot e^{-x} + \tan(x)$
- $y_a(t) = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{-t} + \sin(t)$

Lösung 1

Ansatz: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, einsetzen und anschliessender Koeffizientenvergleich

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^{(k-1)} \quad \text{und} \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot a_k x^{(k-2)}$$

a) exakte Lösung: $y(x) = e^x$, Koeffizienten: $a_0 = 1$, $a_k = \frac{1}{k!}$

b) exakte Lösung: $y(x) = (-\frac{1}{2}) \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}$, Koeffizienten: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und allg. $a_k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{2^{k-1}}{k!}$

c) exakte Lösung: $y(x) = \cos(x) + \sin(x)$, Koeffizienten: gerade Potenzen in x : $a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{(2k)!}$
und ungerade Potenzen in x : $a_{2k+1} = (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}$

Lösung 2

EWP von $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = 2 \pm j$, EV: $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1-j \end{pmatrix}$, $v^{(2)} = (v^{(1)})^* = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1+j \end{pmatrix}$

allgemeine Lösung: $x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} v^{(2)}$

mit den AB: $c_1 = \frac{1+j}{2}$ und $c_2 = c_1^* = \frac{1-j}{2}$

$$x_1(0.5) = e \left(\cos\left(\frac{1}{2}\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right), \quad x_1(t) = e^{2t} (\cos(t) - \sin(t))$$

Oder mit der allgemeinen Schreibweise:

$$x_h(t) = 2e^{2t} \cdot \left\{ (a_1 \cos(t) - b_1 \sin(t)) \cdot u^{(1)} - (a_1 \sin(t) + b_1 \cos(t)) \cdot w^{(1)} \right\} \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1-j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = u^{(1)} + j \cdot w^{(1)}$$

AB:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \left\{ a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - b_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$$

Lösung 3

Ansatz: $s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$

Mit den AB erhalten wir: $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$, die restlichen a_k durch Koeffizientenvergleich.

Nämlich $a_{2+4k} = 0$, $a_{3+4k} = 0$ und $a_{4+4k} = 0$, $k = 1, 2, 3 \dots$ und

$a_5 = -\frac{1}{4 \cdot 5}$, $a_9 = \frac{1}{8 \cdot 9} a_5$, $a_{13} = -\frac{1}{12 \cdot 13} a_9$, $a_{17} = \frac{1}{16 \cdot 17} a_{13}$, also

allgemein: $a_5 = -\frac{1}{4 \cdot 5}$ und $a_{1+4(k+1)} = (-1)^{k+1} \frac{1}{4(k+1)(4k+5)} a_{1+4k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

$$s(t) = t - \frac{1}{4 \cdot 5} t^5 + \frac{1}{(4 \cdot 5)(8 \cdot 9)} t^9 - \frac{1}{(4 \cdot 5)(8 \cdot 9)(12 \cdot 13)} t^{13} + \frac{1}{(4 \cdot 5)(8 \cdot 9)(12 \cdot 13)(16 \cdot 17)} t^{17} - + \dots$$

Lösung 4

a) Grafik

b)

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\frac{t}{2}} & -\infty < t \leq 0 \\ y(t) &= 5 \cdot e^{-\frac{t}{2}} + (-4 + 2t) & 0 \leq t \leq 1 \\ y(t) &= (5 - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}}) \cdot e^{-\frac{t}{2}} + 2 & 1 \leq t \end{aligned}$$

c) Grafik

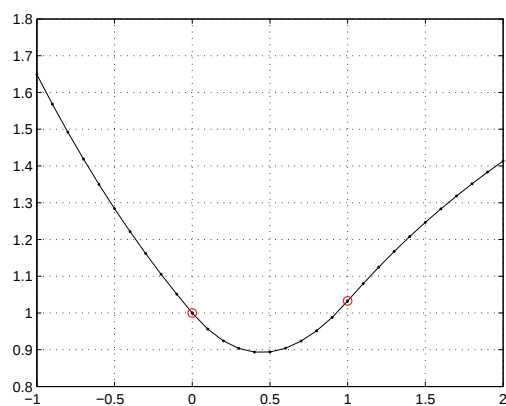


Abbildung 1: stetige Lösung $y(t)$, Ausschnitt der t - Achse: $-1 \leq t \leq 2$
MND2_fig_serie4_aufg4.m

Lösung 5

a) Substitution: $z_1 = y$, $z_2 = y'$ und $z_3 = y'' \Rightarrow z' = Az$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

b) EWP von A : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm j$ mit den zugehörigen

$$\text{EV: } v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+j \\ 2j \end{pmatrix}, v^{(3)} = v^{(2)*}$$

allgemeine Lösung:

$$z_H(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot e^x \left\{ (a_1 \cos(x) - b_1 \sin(x)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (a_1 \sin(x) + b_1 \cos(x)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Lösung 6

Es ist je ein EWP zu lösen.

a) $\lambda_{1,2} = \pm j$ mit den EV $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1+j \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = v^{(1)*}$,

d.h. die allgemeine Lösung ist

$$x_H(t) = 2 \cdot \left\{ (a_1 \cos(t) - b_1 \sin(t)) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - (a_1 \sin(t) + b_1 \cos(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$ mit den EV $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

d.h. die allgemeine Lösung ist $x_H(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} \cdot v^{(2)}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

In a) handelt es sich um ein Zentrum.

In b) handelt es sich um ∞ -viele Gleichgewichtslagen, d.h. $E_{\lambda_1} = \text{span}\{v^{(1)}\}$, alle instabil.

Die Grafik ist am elegantesten mit dem Maple-File `phasenportraet_1.mws` in meinem Public zu haben.

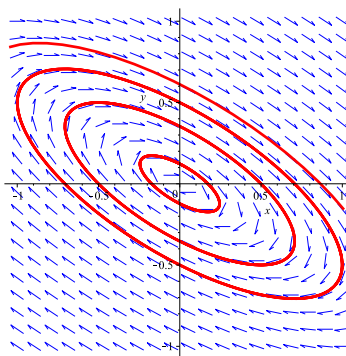


Abbildung 2: Phasenporträt für $\dot{x} = Ax$, Aufgabe 6a)
`phasenportraet_1.mws`

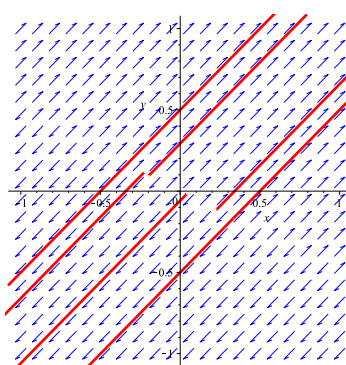


Abbildung 3: Phasenporträt für $\dot{x} = Ax$, Aufgabe 6b)
`phasenportraet_1.mws`

Lösung 7

Sei $A(t)$ = Aktivität, bzw. die Anzahl der ^{14}C Atome

Es gilt:

$$A(t) = e^{-\lambda t} \quad \lambda = \frac{\ln(2)}{T} = \frac{\ln(2)}{5730 \pm 40} \quad T = \text{Halbwertszeit}$$

Sei heute die Zeit t_1 mit

$$A(t_1) = 0.91 = e^{-\lambda t_1} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\ln(0.91)}{-\lambda} = \frac{\ln(0.91)}{-\ln(2)} \cdot (5730 \pm 40) \approx 0.14 \cdot (5730 \pm 40) = 779.63 \pm 5.44 \text{ Jahre}$$

Heute haben wir das Jahr 2014, also stammt der Tisch aus dem Jahre

$$2014 - (779.63 \pm 5.44) = 1234.37 \mp 5.44$$

m.a.W.: König Arthur ist nie an diesem Tisch gesessen!

Lösung 8

a) $p_2(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, d.h. $\lambda = 2$ ist doppelte NS, $y_2(x) = e^{2x}$, also $y'' - 4y' + 4y = 0$

b) $p_2(\lambda) = \lambda^2 + 9$, d.h. $\lambda_{1,2} = \pm j \cdot 3$, $y_2(x) = \cos(3x)$, also $y'' + 9y = 0$, Dgl des Harmonischen Oszillators

Lösung 9

a) $y_a(x) = y_h(x) + y_p(x) = c \cdot e^{-x} + \tan(x)$, also $y' + y = g(x)$, $\lambda = -1$, einfach.

Bestimmung von $g(x)$: $x_p(x) = \tan(x)$ einsetzen, was $\frac{1}{\cos^2 x} + \tan(x) = g(x)$ liefert und somit ist die gesuchte Differentialgleichung:

$$y' + y = \frac{1}{\cos^2 x} + \tan(x)$$

b) $y_a(t) = y_h(t) + y_p(t)$, $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -1$, je einfach, d.h.

$$p_2(\lambda) = (\lambda + 2) \cdot (\lambda + 1) = \lambda^2 + 3\lambda + 2, \text{ also } \ddot{y} + 3 \cdot \dot{y} + 2 \cdot y = g(t)$$

Bestimmung von $g(t)$: $y_p(t) = \sin(t)$ einsetzen, was uns $g(t) = 3 \cdot \cos(t) + \sin(t)$ liefert und schliesslich

$$\ddot{y} + 3 \cdot \dot{y} + 2 \cdot y = 3 \cdot \cos(t) + \sin(t)$$