

## MND2 Serie 5

**Aufgabe 1**

Ein lineares System transformiert das Eingangssignal  $x(t)$  in das Ausgangssignal  $y(t)$ . Die Transformation ist durch eine lineare Differentialgleichung gegeben. Bestimmen Sie für das Eingangssignal

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < 0 \\ x_e & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

in jedem der Fälle a) - d) das Ausgangssignal  $y(t)$ ,

- a)  $\dot{y} = 2x, y(0) = 0.$
- b)  $\dot{y} + 2y = x, y(0) = 0.$
- c)  $\dot{y} = -\dot{x} + x, y(0) = 0.$
- d)  $\ddot{y} + y = x, y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$

**Aufgabe 2**

- a) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 3x_2 \end{cases} \quad \text{mit den AB:} \quad \begin{cases} x_1(0) = \alpha \\ x_2(0) = \beta \end{cases}$$

- b) Bestimmen Sie die AB so, dass die Lösung für  $t \rightarrow \infty$  beschränkt bleibt.  
Wohin strebt die Lösung  $x(t)$  in diesem Fall?

**Aufgabe 3**

Gegeben ist ein Differentialgleichungssystem  $\dot{x} = Ax$ , wobei

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- Lösen Sie die entsprechenden Systeme durch Entkopplung.
- Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl.  $\Sigma_{\text{neu}}$
- Skizzieren Sie das zugehörige Phasenporträt bzgl.  $\Sigma_e$

---

#### Aufgabe 4

Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + g(t) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad g(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie (1) durch Entkopplung.

- a) Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems an.
- b) Geben Sie *eine* partikuläre Lösung von (1) an.
- c) Superposition von a) und b).

#### Aufgabe 5

Gegeben ist die Differentialgleichung mit AB

$$(2) \quad 2 \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot \dot{x}(t) + 3 \cdot x(t) = 0 \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1.$$

- a) Schreiben Sie (2) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.
- b) Lösen Sie das System aus a) durch Entkopplung für  $k = 5$  und  $k = 4$ .
- c) Die Lösungen müssen in reeller Form geschrieben werden.

#### Aufgabe 6

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(3) \quad y^{(3)} + 6 \cdot y'' + 11 \cdot y' + 6 \cdot y = 0$$

- a) Schreiben Sie (3) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung.
- b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems in a) durch Entkopplung.
- c) Bestimmen Sie diejenige Lösung, für die  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -6$  und  $y''(0) = 14$  erfüllt sind.

#### Aufgabe 7

Welche inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten niedrigster Ordnung hat als allgemeine Lösungen die folgenden Funktionen:

$$y_a(t) = a \cdot \cos(2t) + b \cdot \sin(2t) + t \quad a, b \in \mathbb{R}$$

**Lösung 1**

Es handelt sich um die Sprungantwort eines Systems:  
für alle Fälle gilt:  $y(t) = 0$ , falls  $-\infty < t < 0$

a)  $y(t) = x_e \cdot 2t, 0 \leq t < \infty$

b)  $y(t) = -\frac{x_e}{2} \cdot e^{-2t} + \frac{x_e}{2}, 0 \leq t < \infty$

c)  $y(t) = x_e \cdot t, 0 \leq t < \infty$

d)  $y(t) = -x_e \cdot \cos(t) + \sin(t) + x_e, 0 \leq t < \infty$

Die Harmonische Schwingung ist  $\sqrt{1+x_e^2} \cdot \sin(t+\varphi)$ , wobei  $\varphi = \arctan(-x_e)$ , Zeigerdiagramm.

**Lösung 2**

a) EWP von  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$ , EV:  $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}$ ,  $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}$

allgemeine Lösung:  $x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} v^{(2)}$

mit den AB:  $c_1 = \frac{-\alpha+2\beta}{2\sqrt{5}}$  und  $c_2 = \frac{\alpha(1+\sqrt{5})-2\beta}{2\sqrt{5}}$

b)  $c_1 = 0 \iff \alpha = 2\beta$

$x(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , da  $\lambda_2 < 0$ .

### Lösung 3

Es ist je ein EWP zu lösen.

a)  $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ ,  $\lambda_2 = 1$  mit den EV  $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

d.h. die allgemeine Lösung ist  $x_H(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} \cdot v^{(2)}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

b)  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$  mit den EV  $v^{(1)} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $v^{(2)} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,

d.h. die allgemeine Lösung ist  $x_H(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot v^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} \cdot v^{(2)}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

In a) handelt es sich um einen auslaufenden Knoten.

In b) handelt es sich um einen einlaufenden Knoten.

Die Grafik ist am elegantesten mit dem Maple-File phasenportraet\_1.mws in meinem Public zu haben.

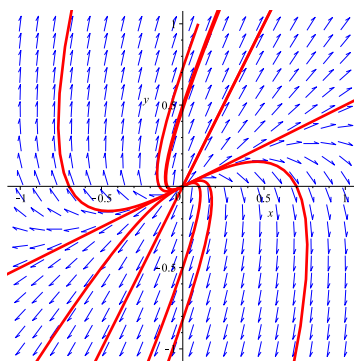


Abbildung 1: Phasenporträt für  $\dot{x} = Ax$ , Aufgabe 3a)  
phasenportraet\_1.mws

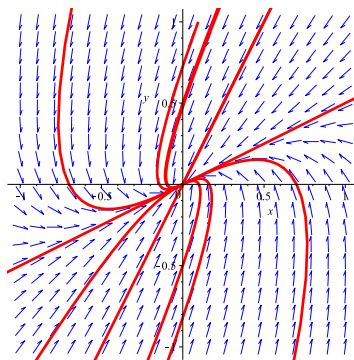


Abbildung 2: Phasenporträt für  $\dot{x} = Ax$ , Aufgabe 3b)  
phasenportraet\_1.mws

### Lösung 4

$$x_a(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

EWP von  $A$ :  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = -2$  mit den zugehörigen EV  $v^{(1)} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $v^{(2)} = \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

a)  $x_h(t) = c_1 \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

b) in  $\Sigma_{\text{neu}}$ :  $g_{\text{neu}} = T^{-1}g = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  und damit  $x_{\text{neu}_p} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  und schliesslich

$$x_p(t) = T x_{\text{neu}_p} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c)  $x_a(t) = c_1 \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

### Lösung 5

a) Substitution  $y_1 = x$  und  $y_2 = \dot{x} \implies \dot{y} = Ay$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{k}{2} \end{pmatrix}$  und  $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) EWP von  $A$ :  $\lambda_{1,2} = -\frac{k}{4} \pm \sqrt{\frac{k^2}{16} - \frac{3}{2}}$  mit den zugehörigen EV  $v^{(1,2)} = \mu_{1,2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,2} \end{pmatrix}, \mu_{1,2} \in \mathbb{C}.$

c) •  $k = 5$ :  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ , mit den AB erhalten wir  $c_1 = -c_2 = 2$ , also

$$y(t) = 2 \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot e^{-\frac{3}{2}t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad 0 \leq t < \infty$$

•  $k = 4$ :  $\lambda_{1,2} = -1 \pm j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$  und damit

$$\begin{aligned} y_H(t) = & 2 \cdot e^{-t} \left\{ \left[ a_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) - b_1 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. - \left[ a_1 \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) + b_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Mit den AB erhalten wir  $a_1 = 0$  und  $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

### Lösung 6

a) Substitution

$$\begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = y' \\ z_3 = y'' \end{cases} \implies z' = Az \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

b) Zu lösen ist das EWP von  $A$ .

EW:  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 11\lambda - 6 \stackrel{!}{=} 0$

$\lambda_1 = -1$  durch erraten, restliche EW mit Hilfe des Hornerchemas:  $\lambda_2 = -2$  und  $\lambda_3 = -3$

EV:

$$v^{(k)} = \mu_k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^2 \end{pmatrix} \quad \mu_k \in \mathbb{R} \quad k = 1, 2, 3$$

---

also

$$v^{(1)} = \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v^{(2)} = \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v^{(3)} = \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und damit

$$z_h(t) = c_1 e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

c) AB:

$$z(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} \implies z(0) = Tc \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauss-Algorithmus erhalten wir  $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

und damit die Lösung

$$z(t) = e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad t \geq 0$$

## Lösung 7

- $y_a(t) = y_h(t) + y_p(t)$ , wobei  $y_h(t) = a \cdot \cos(2t) + b \cdot \sin(2t)$  = Harmonische Schwingung.  
Wir haben zwei freie Parameter, die Differentialgleichung muss also von der Ordnung 2 sein.
- Eine FB ist  $y_1(t) = \cos(2t)$ ,  $y_2(t) = \sin(2t)$ , d.h.  $\lambda_{1,2} = \pm j2$ ,  $\alpha = 0$  und  $\omega = 2$ , also  $p_2(\lambda) = \lambda^2 + 4$ .
- Die Differentialgleichung hat die Form
$$\ddot{y} + 4y = g(t)$$
- Bestimmung von  $g(t)$ :  $y_p(t) = t$  einsetzen  $\Rightarrow g(t) = 4t$