MNM MATLAB 6

Schlecht konditionierte Matrizen und Gleichungssysteme

Definition der Hilbert Matrizen H_n**:** $H_n(i,j) = \dfrac{1}{i+j-1} \quad 1 \le i, j \le n$**.**

Definieren Sie diese Matrizen für $n = 2,3,...,8$ und bestimmen Sie mit Ihrem Gauss Algorithmus die Inversen dieser Hilbert-Matrizen H_n, Qualität dieser Inversen?

Vergleichen Sie die numerisch bestimmte Inverse mit der analytischen Inversen, die wie folgt gegeben ist: $\left[H_n(i,j)\right]^{-1} = \dfrac{(-1)^{i+j} \cdot (n+i-1)! \cdot (n+j-1)!}{(i+j-1) \cdot \left\{(i-1)! \cdot (j-1)!\right\}^2 \cdot (n-i)! \cdot (n-j)!} \quad 1 \le i,\ j \le n$.

(1) Bestimmen Sie die $LR-$Zerlegung dieser Matrizen und überprüfen Sie die Qualität.

(2) Lösen Sie für $n = 7$ das Gleichungssystem $H_7 \cdot x = b$, wobei
$b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$
mit Ihrer $LR-$Zerlegung.
Vergleichen Sie die numerische Lösung mit der exakten Lösung
$x = \begin{pmatrix} 7 & -336 & 3780 & -16800 & 34650 & -33264 & 12012 \end{pmatrix}^T$.
Wie viele Dezimalen sind korrekt?

Betrachten Sie die Matrix $D(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \rho^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\rho^2/2 \\ \rho & -\rho^4/4 & \rho & \rho^2/2 & 1 & \rho^2/2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) Bestimmen Sie D^{-1} mit Ihrem gewöhnlichen Gauss-Algorithmus in Abhängigkeit von ρ.
$\rho = 2^{-10}, 2^{-11}, \ldots, 2^{-14}$
Berechnen Sie anschliessend $D \cdot D^{-1}$
Bestimmen Sie $\left(D^{-1}\right)^{-1}$
Berechnen Sie die Differenz von $\left(D^{-1}\right)^{-1} - D$, bestimmen Sie davon die Norm.
Bestimmen Sie die Kondition von D in Abhängigkeit des Parameters ρ.

Mit **MAPLE** können Sie die exakte Inverse von D bestimmen, vergleichen Sie mit den numerisch bestimmten Inversen.