Numerische Mathematik
Serie 3

Aufgabe 1

a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0.035 & 3.27 \\ 1.25 & 1.31 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3.53 \\ 6.29 \end{pmatrix}$$

mit *drei* - stelliger Arithmetik. Dabei muss *jedes* Zwischenresultat auf drei Ziffern gerundet werden.

- Bestimmen Sie zuerst die $LR-$ Zerlegung von A und prüfen Sie nach, ob $\hat{L} \cdot \hat{R} = A$ dreistellig gültig ist.
- Bestimmen Sie anschliessend die Lösung $\hat{x}$ durch Vorwärts - und Rückwärtseinsetzen.

b) Führen Sie dasselbe nochmals für

$$A = \begin{pmatrix} 1.25 & 1.31 \\ 0.035 & 3.27 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6.29 \\ 3.53 \end{pmatrix}$$

durch.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die $LR-$ Zerlegung von A

a) mit Diagonal-Strategie.

b) mit relativer Kolonnen-Maximum-Strategie.

Aufgabe 3

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}$$

und der exakten Lösung $x^T = (1 \quad -1)$

a) Bestimmen Sie mit vier-stelliger Arithmetik die $LR-$Zerlegung von A mit der relativen Kolonnenmaximum - Strategie.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) die Lösung von $Ax = b$.

c) Was stellen Sie fest?

Numerische Mathematik
Lösungen Serie 3

Lösung 1

"exakte" Lösung: $x = \begin{pmatrix} 3.94492753623188 \\ 1.03728813559322 \end{pmatrix}$

a)

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 35.7 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} 0.035 & 3.27 \\ 0 & -116 \end{pmatrix} \quad \hat{L} \cdot \hat{R} = \begin{pmatrix} 0.035 & 3.27 \\ 1.25 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} 3.53 \\ -120 \end{pmatrix} \qquad \hat{x} = \begin{pmatrix} 4.57 \\ 1.03 \end{pmatrix}$$

$\hat{x}_2$ ist nicht korrekt gerundet, d.h. auch der relative Fehler von $\hat{x}_2$ ist zu gross: $\delta x_2 = 7 \cdot 10^{-3}$

$\hat{x}_1$ ist unbrauchbar: $\delta x_1 = -0.1584$, d.h. der relative Fehler absolut genommen ist grösser als 15%.

b)

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.028 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} 1.25 & 1.31 \\ 0 & 3.23 \end{pmatrix} \quad \hat{L} \cdot \hat{R} = \begin{pmatrix} 1.25 & 1.31 \\ 0.035 & 3.27 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} 6.29 \\ 3.35 \end{pmatrix} \qquad \hat{x} = \begin{pmatrix} 3.94 \\ 1.04 \end{pmatrix}$$

$\hat{x}_2$ ist jetzt korrekt gerundet, d.h. der relative Fehler von $\hat{x}_2$ ist jetzt in Ordnung: $\delta x_2 = -0.0026$, absolut genommen 0.26%.

$\hat{x}_1$ ist auch in Ordnung: $\delta x_1 = 0.0012$, d.h. der relative Fehler absolut genommen 0.12%.

Lösung 2

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{21} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{21}{8} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{55}{21} \end{pmatrix}$$

Es gibt keinen Unterschied bei der $LR-$ Zerlegung, ob mit a) oder b).

Lösung 3

a)

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.8543 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{L} \cdot \hat{R} \neq PA$$

b) $\hat{L}\hat{c} = Pb$: $\hat{c} = \begin{pmatrix} 0.254 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{R}\hat{x} = \hat{c}$ hat die Lösung $\hat{x} = \begin{pmatrix} 0.2782 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -0.7218 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

c) a) vorzeitiger Abbruch bei der Bestimmung der $LR-$ Zerlegung von A.
Da $c_2 = 0$ haben wir keinen Widerspruch, d.h. $x_2 =$ freier Parameter!
$x_1 = 0.2782 - 0.7218\mu$ mit $x_2 = \mu$. Diese Lösung hat mit der exakten Lösung überhaupt nichts zu tun!

Bemerkung 1

Falls in a) nicht permutiert wird erhalten wir:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.171 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0 & -3 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{L} \cdot \hat{R} = \begin{pmatrix} 0.7800 & 0.5630 \\ 0.9134 & 0.6590 \end{pmatrix}$$

$4-$stellig völlig korrekt. Achtung! *Auslöschung* bei der Berechnung von r_{22}! was nichts Gutes verheisst.
Lösung: $\hat{L}\hat{c} = b$, $\hat{c} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ -1 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$ und $\hat{R}\hat{x} = \hat{c}$, $\hat{x} = \begin{pmatrix} -1.887 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Diese numerische Lösung ist ebenso unbrauchbar! Vorzeichen sind falsch, bei der zweiten Komponente ist der relative Fehler 200%!
Kontrollgrössen: $\det(A) = 1.0000e - 006$ und $\kappa(A) = 2.1932e + 006$