Klasse DP1a **NMMa - Klausur** 13. Februar 2004

Name:

Aufgabe 1

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & a \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & b \\ -2x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & c \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = & d \end{array}\right.$$

a) Für welche $4-$Tupel (a, b, c, d) ist das gegebene lineare Gleichungssystem lösbar?

b) Geben Sie für diese Fälle die Lösung an, Rang $r =?$ des Gleichungssystems, Anzahl freie Parameter?

Aufgabe 2

a) Schreiben Sie

$$s_1 = 1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 \pm \cdots - 255x^{254}$$

mit Σ.

b) Bestimmen Sie den Wert für:

$$s_2 = \sum_{k=10}^{20} k(k+3)$$

Aufgabe 3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $(A - \lambda I_3) \cdot x = 0$ nicht-triviale Lösungen hat.

b) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}^3$ so, dass $Ax = x$.

Bitte wenden

Aufgabe 4

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad det(A) = ?$$

b) Gegeben ist der Vektor $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Bilden Sie die Matrix $H_3 = I_3 - 2 \cdot \frac{u \cdot u^T}{u^T \cdot u}$.

Zählen Sie sämtliche Eigenschaften von H_3 auf (**mit** Begründung).

Aufgabe 5

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad\qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die $LR-$Zerlegung von A mit dem Gauss-Algorithmus, **ohne** Permutationen. (enstehende Brüche vollständig gekürzt)

b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, Vorwärts-, bzw. Rückwärtseinsetzen.

Aufgabe 6

Seien $L =$ eine $n \times n-$ untere Dreiecksmatrix und $R =$ eine $n \times n-$ obere Dreiecksmatrix.

a) Was ensteht bei der Multiplikation $L \cdot R$, wieviele Elemente sind von Null verschieden?

b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand (= Anzahl Multiplikationen) bei der Multiplikation in a)

Lösungen 1

a) VB: $a+b+c=0$ und $a-b+d=0$, Abbruch nach zwei Schritten

b) Rang $r=2$, zwei freie Parameter: $x_3=\mu$ und $x_4=\nu$
$x_1=-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}\mu+\nu$, $x_2=-\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}\mu$, wobei $a+b=-c$ und $a-b=-d$

Lösungen 2

a) $s_1=\sum_{k=0}^{127}(-1)^k(2k+1)x^{2k}$

b) $s_2=\sum_{k=1}^{20}(k^2+3k)-\sum_{k=1}^{9}(k^2-3k)$
allgemein: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)(\frac{n+5}{3})$: für $n=20$ minus $n=9$ also $s_2=20\cdot 7\cdot 25-3\cdot 10\cdot 14=3080$

Lösungen 3

a) $det(A-\lambda\cdot I_3)=0$,
Entwicklung nach der ersten Spalte: $(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-1)=0$, $\lambda_1=1$ und $\lambda_{2.3}=1\pm\sqrt{2}$

b) $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mu\in\mathbb{R}$

Lösungen 4

a) $A^T=-A$, $det(A^T)=(-1)^3\cdot det(A)$ und somit:
$det(A)=(-1)^3\cdot det(A)=-det(A)=0$

b) $H_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ H_3 ist eine sogenannte Householdermatrix, vgl. p32, Skript Lineare Algebra.
$H_3^T=H_3$, $H_3^{-1}=H_3^T$, $H_3^2=I_3$ $det(H_3)=-1$, H_3 ist eine Spiegelung an der Ebene durch Null orthogonal zu u.

Lösungen 5

a) $L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4/5 & 1 \end{pmatrix}$ $R=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6/5 \end{pmatrix}$

b) vorwärts: $Lc=b$, $c^T=(0 \quad 1 \quad 2/3 \quad 1/2 \quad 2/5)$
rückwärts: $Rx=c$, $x^T=(-2/3 \quad -4/3 \quad -1 \quad -2/3 \quad -1/3)$

Lösungen 6

a) $A=L\cdot R$ ist eine $n\times n-$Matrix, alle Elemente i.allg. verschieden von Null, also vollbesetzt.

b) $1-te$ Zeile: $1+1+1+\ldots=n\cdot 1$
$2-te$ Zeile: $1+2+2+2+\ldots=1+(n-1)\cdot 2$
$3-te$ Zeile: $1+2+3+3+3\ldots=1+2+(n-2)\cdot 3$
$4-te$ Zeile: $1+2+3+4+4\ldots=1+2+3+(n-3)\cdot 4$

$j-te$ Zeile: $1+2+\ldots+(j-1)+(n-j+1)\cdot j$

$n-te$ Zeile: $1+2+\ldots+(n-1)+n$

somit Rechenaufwand: $n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 3+\ldots+1\cdot n=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\cdot k=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

zudem : $(n-1)\cdot 1+(n-2)\cdot 2+(n-3)\cdot 3+\ldots 1\cdot(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cdot k=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

insgesamt: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\sum_{k=1}^{n}k^2$, d.h. $O(n)=\frac{n^3}{3}$

also doppelt so gross, wie wenn zwei untere bzw. obere Dreiecksmatrizen miteinander multipliziert würden.