Klasse DP1a **NMMa - Klausur** 18. Dezember 2003

Name:

Aufgabe 1

Wann hat das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x+y+z &= 1 \\ x+2z &= \mu \\ x+\lambda y+z &= 1 \end{aligned}$$

a) keine Lösung?

b) ∞ -viele Lösungen mit einem, bzw. zwei freien Parametern? (**mit** Angabe der Lösungen)

c) genau eine Lösung?

a) - c) mit *geometrischer* Interpretation.

Aufgabe 2

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von A mit dem Gauss-Algorithmus. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das überhaupt möglich?

b) Berechnen Sie die folgende Determinante auf möglichst einfache Weise. (Resultat **exakt**)

$$\begin{vmatrix} \pi & \pi & \pi & \pi \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ e & e & -e & -e \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} =?$$

Aufgabe 3

Gegeben sind $u,\ v \in \mathbb{R}^n$ mit $||u||_2 = ||v||_2 = 1$ und $u^T v = c$, sowie die Matrizen $A = u \cdot u^T + v \cdot v^T$ und $B = u \cdot v^T + v \cdot u^T$.

1. Bestimmen Sie A^T und B^T .
2. Stellen Sie die Produkte A^2 und $A \cdot B$ als Linearkombination von A und B dar.

Aufgabe 4

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & a \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & b \\ -2x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & c \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = & d \end{array} \right.$$

a) Für welche $4-$Tupel (a, b, c, d) ist das gegebene lineare Gleichungssystem lösbar?

b) Geben Sie für diese Fälle die Lösung an, Rang $r =?$ des Gleichungssystems, Anzahl freie Parameter?

Aufgabe 5

a) Schreiben Sie

$$s_1 = 1 - 3x^2 + 5x^4 - 5x^4 - 7x^6 \pm \cdots - 255x^{254}$$

mit Σ.

b) Bestimmen Sie den Wert für:

$$s_2 = \sum_{k=10}^{20} k(k+3)$$

Aufgabe 6

Seien $L =$ eine $n \times n-$ untere Dreiecksmatrix und $R =$ eine $n \times n-$ obere Dreiecksmatrix.

a) Was ensteht bei der Multiplikation $L \cdot R$, wieviele Elemente sind von Null verschieden?

b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand ($=$ Anzahl Multiplikationen) bei der Multiplikation in a)

Aufgabe 7

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $(A - \lambda I_3) \cdot x = 0$ nicht-triviale Lösungen hat.

b) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}^3$ so, dass $Ax = x$.

Aufgabe 8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

a) Für welche rechte Seiten b hat das gegebene Gleichungssystem Lösungen?

b) Bestimmen Sie mit a) b_2 und anschliessend für $b^T = \begin{pmatrix} -1 & b_2 & 1 \end{pmatrix}$ die Lösungen.

Aufgabe 9

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} & + & sx_2 & + & x_3 & + & t & = & 0 \\ sx_1 & & & + & tx_3 & + & 1 & = & 0 \\ sx_1 & + & sx_2 & + & 2x_3 & + & 2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Geben Sie Bedingungen für die reellen Parameter s und t an, so dass das lineare Gleichungssystem

a) eine Lösung mit *zwei* freien Parametern hat.

b) eine Lösung mit *einem* freien Parameter hat.

c) eine eindeutige Lösung hat.

d) keine Lösung hat.

Geben Sie den jeweiligen Rang des Gleichungssystems an.

Aufgabe 10

Gegeben ist das Problem $H(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}\,, \quad x > 0$

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa_H(x)$ für $x \longrightarrow \infty$.

b) Berechnen Sie $H(x)$ für $x = 10^9$ $naiv$ und anschliessend $ohne$ Auslöschung, TR-Genauigkeit mit entsprechendem Format.

Aufgabe 11

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad det(A) = ?$$

b) Gegeben ist der Vektor $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Bilden Sie die Matrix $H_3 = I_3 - 2 \cdot \frac{u \cdot u^T}{u^T \cdot u}$.

Zählen Sie sämtliche Eigenschaften von H_3 auf (**mit** Begründung).

Aufgabe 12

Eine Ebene E durch den Nullpunkt ist senkrecht zu $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix S der Spiegelung an E (bzgl. der Standardbasis Σ_e).

b) Geben Sie eine neue Basis Σ_{neu} an, so dass die Abbildungsmatrix S_{neu} bezüglich Σ_{neu} möglichst einfach wird.

Bitte wenden

Aufgabe 13

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rrrcc} x_1 & & +\beta \cdot x_3 & = & \alpha - \beta \\ \alpha \cdot x_1 & +\beta^2 x_2 & +x_3 & = & \alpha^2 \\ x_1 & +x_2 & +\beta \cdot x_3 & = & \alpha \end{array}\right. \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Wann gibt es

a) genau eine Lösung?

b) keine Lösung?

c) unendlich viele Lösungen mit einem, zwei freien Parametern? (**mit** Angabe der Lösungen)

Aufgabe 14

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die $LR-$Zerlegung von A mit dem Gauss-Algorithmus, **ohne** Permutationen. (enstehende Brüche vollständig gekürzt)

b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, Vorwärts-, bzw. Rückwärtseinsetzen.

Aufgabe 15

Gegeben ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist $x \in \mathbb{R}^3$ so, dass die Gleichung $Bx = 2x$ gültig ist (**alle** Lösungen).