Klassen MI1a/MT1a **DMa - Klausur** 12. Februar 2004

Name:

Aufgabe 1

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von A mit dem Gauss-Algorithmus. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das überhaupt möglich?

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

Für welche Parameterwerte a, b und c ist die Determinante ungleich Null?

Aufgabe 2

a) Schreiben Sie

$$s_1 = \frac{2}{x} - 4x + 6x^3 - 8x^5 + 10x^7 \mp \cdots - 256x^{253}$$

mit Σ.

b) Bestimmen Sie den Wert für:

$$s_2 = \sum_{j=8}^{18} j(j-2)$$

Aufgabe 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

a) Für welche rechte Seiten b hat das gegebene Gleichungssystem Lösungen?

b) Bestimmen Sie mit a) b_2 und anschliessend für $b^T = \begin{pmatrix} -1 & b_2 & 1 \end{pmatrix}$ die Lösungen.

Bitte wenden

Aufgabe 4

$$\begin{cases} & + & sx_2 & + & x_3 & + & t & = & 0 \\ sx_1 & & & + & tx_3 & + & 1 & = & 0 \\ sx_1 & + & sx_2 & + & 2x_3 & + & 2 & = & 0 \end{cases}$$

Geben Sie Bedingungen für die reellen Parameter s und t an, so dass das lineare Gleichungssystem

a) eine Lösung mit *zwei* freien Parametern hat.

b) eine Lösung mit *einem* freien Parameter hat.

c) eine eindeutige Lösung hat.

d) keine Lösung hat.

Geben Sie den jeweiligen Rang des Gleichungssystems an.

Aufgabe 5

Sei $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ $\quad a \in \mathbb{R}$ und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

a) Was kann mit Hilfe der Determinante von A über die Lösungen von $Ax = c$ gesagt werden?

b) Geben Sie die Lösungen für $a = 1$ und
i) $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ii) $c \in \mathbb{R}^3$ beliebig
an.

Aufgabe 6

Gegeben ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist $x \in \mathbb{R}^3$ so, dass die Gleichung $Bx = 2x$ gültig ist ($\mathbf{alle}$ Lösungen).

Lösung 1

a) $a \neq 0$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & -1/a^2 \\ a & -1 & 1/a \\ -a^2 & a & 0 \end{pmatrix}$

b) $det(A) = (a-b)(b-c)(c-a)$, $det(A) \neq 0$ falls $a \neq b$ und $b \neq c$ und $c \neq a$

Lösung 2

a) $s_1 = \sum_{k=0}^{127} (-1)^k (2k+2) x^{2k-1}$

b) $s_2 = \sum_{j=1}^{18} (j^2 - 2j) - \sum_{j=1}^{7} (j^2 - 2j)$
allgemein: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)(\frac{2n-5}{6})$: für $n = 18$ minus $n = 7$ also $s_2 = 3(19 \cdot 31 - 4 \cdot 7) = 3 \cdot 561 = 1683$

Lösung 3

a) Lösungen, falls $-3b_1 - b_2 + b_3 = 0$ mit drei freien Parametern, sonst keine Lösungen.

b) $b_2 = 4$ x_3, x_4 und x_5 freie Parameter.
$x_1 = -1 + 2x_3 - 3x_4 - x_5$ und $x_2 = 3 + 2x_3 - 2x_4$

Lösung 4

a) $s = 0$ und $t = 1$ Rang: $r = 1$

b) $s \neq 0$ und $t = 1$ Rang: $r = 2$

c) $s \neq 0$ und $t \neq 1$ Rang: $r = 3$

d) $s = 0$ und $t \neq 1$

Lösung 5

a) falls $det(A) = a(a^2 - 2) \neq 0$ hat $Ax = c$ für jedes c genau eine Lösung
falls $a(a^2 - 2) = 0$: $Ax = 0$ hat nicht-triviale Lösungen
falls $a(a^2 - 2) = 0$: $Ax = c$ hat je nach c, keine oder $\infty-$viele Lösungen

b) $det(A) = -1 \neq 0$
i) $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung
ii) $x_1 = -c_1 - c_3$, $x_2 = -c_1 - c_2 - c_3$ und $x_3 = -c_1 - c_2$

Lösung 6

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$