

--	--	--	--	--	--	--	--

Name:

Aufgabe 1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = a \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = b \\ -2x_1 - x_3 + 2x_4 = c \\ -2x_2 + x_3 = d \end{cases}$$

- a) Für welche 4-Tupel (a, b, c, d) ist das gegebene lineare Gleichungssystem lösbar?
b) Geben Sie für diese Fälle die Lösung an, Rang $r = ?$ des Gleichungssystems, Anzahl freie Parameter?

Aufgabe 2

a) Schreiben Sie

$$s_1 = 1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 \pm \dots - 255x^{254}$$

mit Σ .

b) Bestimmen Sie den Wert für:

$$s_2 = \sum_{k=10}^{20} k(k+3)$$

Aufgabe 3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $(A - \lambda I_3) \cdot x = 0$ nicht-triviale Lösungen hat.
b) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}^3$ so, dass $Ax = x$.

Bitte wenden

Aufgabe 4

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A) = ?$$

b) Gegeben ist der Vektor $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Bilden Sie die Matrix $H_3 = I_3 - 2 \cdot \frac{u \cdot u^T}{u^T \cdot u}$.

Zählen Sie sämtliche Eigenschaften von H_3 auf (mit Begründung).

Aufgabe 5

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die LR -Zerlegung von A mit dem Gauss-Algorithmus, **ohne** Permutationen. (entstehende Brüche vollständig gekürzt)

b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, Vorwärts-, bzw. Rückwärtseinsetzen.

Aufgabe 6

Seien $L =$ eine $n \times n$ - untere Dreiecksmatrix und $R =$ eine $n \times n$ - obere Dreiecksmatrix.

a) Was entsteht bei der Multiplikation $L \cdot R$, wieviele Elemente sind von Null verschieden?

b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand (= Anzahl Multiplikationen) bei der Multiplikation in a)

Lösungen 1

- a) VB: $a + b + c = 0$ und $a - b + d = 0$, Abbruch nach zwei Schritten
- b) Rang $r = 2$, zwei freie Parameter: $x_3 = \mu$ und $x_4 = \nu$
 $x_1 = -\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\mu + \nu$, $x_2 = -\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}\mu$, wobei $a + b = -c$ und $a - b = -d$

Lösungen 2

- a) $s_1 = \sum_{k=0}^{127} (-1)^k (2k+1)x^{2k}$
- b) $s_2 = \sum_{k=1}^{20} (k^2 + 3k) - \sum_{k=1}^9 (k^2 - 3k)$
allgemein: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)\left(\frac{n+5}{3}\right)$: für $n = 20$ minus $n = 9$ also $s_2 = 20 \cdot 7 \cdot 25 - 3 \cdot 10 \cdot 14 = 3080$

Lösungen 3

- a) $\det(A - \lambda \cdot I_3) = 0$,
Entwicklung nach der ersten Spalte: $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) = 0$, $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$
- b) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$

Lösungen 4

- a) $A^T = -A$, $\det(A^T) = (-1)^3 \cdot \det(A)$ und somit:
 $\det(A) = (-1)^3 \cdot \det(A) = -\det(A) = 0$
- b) $H_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ H_3 ist eine sogenannte Householdermatrix, vgl. p32, Skript Lineare Algebra.
 $H_3^T = H_3$, $H_3^{-1} = H_3^T$, $H_3^2 = I_3$ $\det(H_3) = -1$, H_3 ist eine Spiegelung an der Ebene durch Null orthogonal zu u .

Lösungen 5

- a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4/5 & 1 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6/5 \end{pmatrix}$
- b) vorwärts: $Lc = b$, $c^T = (0 \quad 1 \quad 2/3 \quad 1/2 \quad 2/5)$
rückwärts: $Rx = c$, $x^T = (-2/3 \quad -4/3 \quad -1 \quad -2/3 \quad -1/3)$

Lösungen 6

- a) $A = L \cdot R$ ist eine $n \times n$ -Matrix, alle Elemente i.allg. verschieden von Null, also vollbesetzt.

- b) 1-te Zeile: $1 + 1 + 1 + \dots = n \cdot 1$
 2-te Zeile: $1 + 2 + 2 + 2 + \dots = 1 + (n - 1) \cdot 2$
 3-te Zeile: $1 + 2 + 3 + 3 + 3 \dots = 1 + 2 + (n - 2) \cdot 3$
 4-te Zeile: $1 + 2 + 3 + 4 + 4 \dots = 1 + 2 + 3 + (n - 3) \cdot 4$

$$j\text{-te Zeile: } 1 + 2 + \dots + (j - 1) + (n - j + 1) \cdot j$$

$$n\text{-te Zeile: } 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n$$

$$\text{somit Rechenaufwand: } n \cdot 1 + (n - 1) \cdot 2 + (n - 2) \cdot 3 + \dots + 1 \cdot n = \sum_{k=1}^n (n - k + 1) \cdot k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\text{zudem : } (n - 1) \cdot 1 + (n - 2) \cdot 2 + (n - 3) \cdot 3 + \dots + 1 \cdot (n - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (n - k) \cdot k = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

$$\text{insgesamt: } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{k=1}^n k^2, \text{ d.h. } O(n) = \frac{n^3}{3}$$

also doppelt so gross, wie wenn zwei untere bzw. obere Dreiecksmatrizen miteinander multipliziert würden.