Klassen MI1a/MT1a **DMa - Klausur** 18. Dezember 2003

Name:

Aufgabe 1

a) Bei der Lösung von $Ax = b$ erhält Student Büchi

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

und behauptet, damit die `rref` bestimmt zu haben. Studentin von Känel widerspricht ihm. Wer hat Recht (**mit** Begründung). Falls Studentin von Känel recht hat: wie sieht die `rref` aus? Bestimmen Sie zudem m, n und r, geben Sie die Lösungen an.

b) Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Gesucht: B so, dass $AB = BA$, **alle** Lösungen. Was ist an B speziell?

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die **positiven** Grössen a, b, c, d, e und f so, dass

$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & d \\ a & b & e \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -c & f \end{pmatrix}$ orthogonal ist, d.h. dass $C^T C = I_3$.

b) Was erhalten Sie für $C\,C^T$?

c) Lösen Sie mit C aus a) das lineare Gleichungssystem $Cx = b$ mit $b = (1,\ 0,\ -1)^T$

Aufgabe 3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 6 \\ 4 & -6 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -5 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie L, R und P so, dass $LR = PA$

b) Lösen Sie mit Hilfe der $LR-$Zerlegung aus a) das Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $b = (2,\ 4,\ -1)^T$

bitte wenden!

Aufgabe 4

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & ax_2 & + & bx_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2ax_2 & + & bx_3 & = & 2+a \\ -x_1 & + & ax_2 & - & x_3 & = & 2a-1-b \end{array}\right.$$

a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge zwei freie Parameter?

b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge von Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

Geben Sie in den Fällen a) und b) die Lösungen an.

Aufgabe 5

Rechenaufwand für das Rückwärtseinsetzen:
Gegeben ist ein Endschema für n Gleichungen mit n Unbekannten, $\mathbf{ohne}$ vorzeitigen Abbruch, i.e.

$$\begin{array}{ccccc} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} & c_1 \\ & r_{12} & \dots & r_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & r_{nn} & c_n \end{array}$$

Bestimmen Sie die Anzahl wesentlicher Operationen (= Anzahl Divisionen und Mulktiplikationen), die für das Rückwärtseinsetzen zur Bestimmung der Lösung x nötig ist.

Aufgabe 6

a)

$$\text{Gesucht:} \qquad s = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} 2k \right)$$

b)

$$\text{Gegeben:} \quad \sum_{j=1}^{20} (5x_j - 1) = 0 \quad \sum_{j=1}^{20} (4x_j - 1)^2 = 0 \qquad \text{Gesucht:} \quad s = \sum_{k=1}^{20} \left\{ 2x_k - 3 \sum_{j=1}^{20} (-x_j + 1)^2 \right\}$$