Klasse DP1a **NMMa - Klausur Lösungen** 27. Mai 2004

Name:

1 erster Teil: ohne Taschenrechner

Lösung 1

a) nein, da $(N1)$ verletzt, sei $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mit $x \neq 0$, dann gilt: $n(x) = 0$,
i. allg. falls $x_1 = -|x_2| - 2\,|x_3|$, nicht alle x_k gleichzeitig Null.

b) $c = \sin(\varphi)$, Pythagoras $A^{-1} = A^T$
$\|A\|_1 = \|A^{-1}\|_1 = \cos\varphi + sin(\varphi)$ Spalten-Maximum
$\|A\|_\infty = \|A^{-1}\|_\infty = \cos(\varphi) + sin(\varphi)$ Zeilen-Maximum
somit $\kappa(A) = \|A\|_* \cdot \|A^{-1}\|_* = (\cos(\varphi) + sin(\varphi))^2 = 1 + \sin(2\varphi)$ für beide Normen.

Lösung 2

$H(b) = \frac{b}{b^2-1} \qquad H'(b) = -\frac{b^2+1}{(b^2-1)^2}$ somit: $\kappa_H(b) = \frac{b^2+1}{|b^2-1|}$ und schliesslich $\lim_{b\to\pm 1} \kappa_H(b) =$ „∞“,

d.h. dieser Grenzwert existiert nicht. M.a.W. die Kondition ist schlecht, d.h. die Auslöschung kann *nicht* vermieden werden.

Lösung 3

a) $O_n = a + \frac{a^3}{60}\,\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$ bzw. $U_n = a + \frac{a^3}{60}\,\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$

b) $A = a + \frac{a^3}{30}$

c) $n > 10\,a$

2 zweiter Teil: mit Taschenrechner

Lösung 4

Aus dem Flächensatz folgt die gegebene Gleichung, wobei
$E =$ Anomalie, $M =$ mittlere Anomalie und $\varepsilon =$ Exzentrizität.

$0 = E - \varepsilon\, \sin(E) - M$, also $0 = f(x) = x - \varepsilon\, \sin(x) - 2$
$f'(x) = 1 - \varepsilon\, \cos(x)$ und $f''(x) = \varepsilon\, \sin(x)$
$L = |\frac{f(E_0)f''(E_0)}{(f'(E_0))^2}| = 0.141633267\ldots < 1$, d.h. die Konvergenzbedingung ist erfüllt.

E_k	
0	2
1	2.376341956155751
2	2.354305393351647
3	2.354242758736385
4	2.354242758222781 $= E_5$

Lösung 5

$F(x) = 2^{x-1}$; $s_1 = 1$ und $s_2 = 2$ $F'(x) = \frac{\ln(2)}{2}\, 2^x$
$F'(1) = \ln(2) < 1$, d.h. $s_1 = 1$ ist attraktiv
$F'(2) = 2\, \ln(2) > 1$, d.h. $s_2 = 1$ ist abstossend
$x_0 < 1 \longrightarrow s_1$ oder $1 < x_0 < 2 \longrightarrow s_1$
$x_0 > 2$ divergent

Lösung 6

a) $s_1 = 8.87298\ldots$ und $s_2 = 1.1270\ldots$ $F'(x) = 0.2\, x$ daraus folgt, dass s_1 abstossend und s_2 attraktiv.

b) $F^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{0.1}}$ $q = (F^{-1})'(s_1) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\, \frac{1}{0.1} \simeq 0.56$

x_k	
0	8
1	8.366600265340756
2	8.582890110761500
3	8.707979163251080
4	8.779509760374482
5	8.820152924056636
6	8.843162852767462
7	8.856163307418997
8	8.863500046493483
9	8.867637817645397
10	8.869970584869714
11	8.871285467658964
12	8.872026525917832