Klasse DP1a **NMMa - Klausur** 17. Juni 2004

Name:

Aufgabe 1

Die Gleichung $x^2 - 1 - \cos(x) = 0$ hat eine Lösung im Intervall $[1, 1.5]$. Welche der angegebenen *Iterationsvorschriften* (evtl. auch mehrere) kann man zur Bestimmung dieser Lösung verwenden? (*mit* Begründung, Satz über das Iterationsverfahren)

$$\text{a)}\quad x_{k+1} = \frac{1+\cos(x_k)}{x_k} \qquad \text{b)}\quad x_{k+1} = \sqrt{1+\cos(x_k)} \qquad \text{c)}\quad x_{k+1} = 1 + \frac{\cos x_k}{x_k+1}$$

d) Wieviele Schritte müssten Sie für $7-$stellige Genauigkeit durchführen, falls Sie das angebene Intervall für eine *Bisektion* verwenden würden?

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Gewichte $w_k \in \mathbb{R}$ so, dass die Integrationsformel

$$Q = w_0\, f\left(-\frac{3h}{4}\right) + w_1\, f\left(-\frac{h}{4}\right) + w_2\, f\left(\frac{h}{4}\right) + w_3\, f\left(\frac{3h}{4}\right)$$

jedes Polynom höchstens $3-$ten Grades auf $[-h, h]$ exakt integriert, *exakte* Angaben.
Testen Sie Q mit $p_3(\xi) = a_0 + a_1\,\xi + a_3\,\xi^3$, $-h \le \xi \le h$

Aufgabe 3

$$f(t) = 1 + e^{-t} \qquad f^{-1}(t) = ?$$

In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven $C_1:\ y = f(t)$ und $C_2:\ y = f^{-1}(t)$, graphische Darstellung (Einheiten auf beiden Achsen: $1 \widehat{=} 4$ Häuschen).
Benützen Sie die Methode von *Newton*, *alle* Zwischenresultate, auf Rechner-Genauigkeit.

Aufgabe 4

Berechnen Sie

$$I = \int_{-1}^{1} e^x\, dx$$

mit einer *Obersumme*. Dabei soll das Intevall $[-1, 1]$ in n gleichlange Teile zerlegt werden. (Resultat *so einfach, wie möglich*).

Aufgabe 5

$h(x) = \sqrt{2 \cdot e^{-x}}$ hat in $[a, b] = [0.5, 2]$ einen Fixpunkt.

a) Bestimmen Sie mit *Bisektion* (4 Schritte) einen Startwert für die Iteration $x = h(x)$, graphische Darstellung der neuen Mitten, Einheit auf der $x-$Achse $1 \widehat{=} 10cm$

b) Wie gross ist der relative Fehler dieses Startwerts?

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die ersten beiden Trapezwerte ($0-$te und $1-$te Halbierung) für das Integral

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

a) Geben Sie für die $1-$te Halbierung den maximal möglichen Fehler an und vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Fehler.

b) Geben Sie den ersten Simpsonwert S_1 an und geben Sie für diesen Wert den tatsächlichen Fehler an.