Lösung 1

$s = 1.176501\ldots$,
Satz über das Iterationsverfahren: ii) für alle drei Iterationen erfüllt, i) bei a) verletzt, bleibt nur iii) zu prüfen:

a)
$$F_a'(x) = \frac{-\sin(x)\cdot x - 1 - \cos(x)}{x^2} \quad F_a'(1) = -2.38\ldots \quad F_a(1.5) = -1.14\ldots$$
d.h. abstossender Fixpunkt, kann nicht verwendet werden.

b)
$$F_b'(x) = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{1+\cos(x)}} \quad F_b'(1) = -0.339\ldots \quad F_b(1.5) = -0.48\ldots$$
d.h. attraktiver Fixpunkt, kann verwendet werden.

c)
$$F_c'(x) = \frac{-\sin(x)\cdot(x+1) - \cos(x)}{(x+1)^2} \quad F_c'(1) = -0.55\ldots \quad F_c(1.5) = -0.41\ldots$$
d.h. attraktiver Fixpunkt, kann verwendet werden.

d)
$$n > \ln\left|\frac{0.5}{5\cdot 10^{-8}}\right| \cdot \frac{1}{\ln(2)} \simeq 23.25 \qquad \text{also} \quad n = 24$$

Lösung 2

zu lösendes Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} w_0 & + & w_1 & + & w_2 & + & w_3 & = & 2\,h \\ -3w_0 & - & w_1 & + & w_2 & + & 3w_3 & = & 0 \\ 9w_0 & + & w_1 & + & w_2 & + & 9w_3 & = & \frac{32}{3}\,h \\ -27w_0 & - & w_1 & + & w_2 & + & 27w_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

mit Gauss: $w_0 = w_3 = \frac{13}{24}\,h$ und $w_1 = w_2 = \frac{11}{24}\,h$

$$\int_{-h}^{h} p_3(\xi)\,d\xi = w_0\,p_3\left(-\frac{3h}{4}\right) + w_1\,p_3\left(-\frac{h}{4}\right) + w_2\,p_3\left(\frac{h}{4}\right) + w_3\,p_3\left(\frac{3h}{4}\right)$$

mit
$$\begin{aligned} p_3\left(-\frac{3h}{4}\right) &= a_0 - a_1\,\frac{3h}{4} - a_3\,\left(\frac{3h}{4}\right)^3 \\ p_3\left(-\frac{h}{4}\right) &= a_0 - a_1\,\frac{h}{4} - a_3\,\left(\frac{h}{4}\right)^3 \\ p_3\left(\frac{h}{4}\right) &= a_0 + a_1\,\frac{h}{4} + a_3\,\left(\frac{h}{4}\right)^3 \\ p_3\left(\frac{3h}{4}\right) &= a_0 + a_1\,\frac{3h}{4} + a_3\,\left(\frac{3h}{4}\right)^3 \end{aligned}$$

erhält man $a_0\,(w_0 + w_1 + w_2 + w_3) = a_0\,2h$
Ungerade Potenzen in ξ ergeben über ein zum Ursprung symmetrisches Intervall integriert immer Null.

Lösung 3

$f^{-1}(t) = -\ln(t-1)$
Zu lösende Gleichung $1 + e^{-t} = t$ und damit: $g(t) := 1 - t + e^{-t}$
Newton:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{1 - t_k + e^{-t_k}}{-1 - e^{-t_k}}$$

t_k	
t_0	0.2
t_1	1.0900...
t_2	1.2784626...
t_3	1.2784626...
t_4	1.27846454276 $= t_5$

Somit ist $S(t_4/t_4)$. $m_1 = \frac{d}{dt}\,f(t_4) = -0.2784645\ldots$ und $m_2 = \frac{1}{m_1} = -3.59112147667$
$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \arctan(m_2) - \arctan(m_1) = 1.02762771251$ Bogenmass bzw. $\varphi \approx 58.879^o$

Lösung 4

$\Delta x = \frac{2}{n}$

$$\begin{aligned} O_n &= \Delta x \cdot \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \\ &= \Delta x \cdot \sum_{k=1}^{n} e^{-1+k\cdot\frac{2}{n}} = \frac{2}{n}\,e^{-1}\,\sum_{k=1}^{n} e^{k\cdot\frac{2}{n}} = \frac{2}{n}\,e^{-1}\,e^{\frac{2}{n}}\,\sum_{k=0}^{n-1} e^{k\cdot\frac{2}{n}} \\ &= \frac{2}{n}\,e^{-1}\,e^{\frac{2}{n}} \cdot \frac{e^2-1}{e^{2/n}-1} = \frac{e^2-1}{e} \cdot \frac{2/n}{1-e^{-2/n}} \end{aligned}$$

Lösung 5

a) $x = h(x)$, also $f(x) = h(x) - x$ Bisektion:

Wert links	Wert rechts
0.5 +	2 -
0.5 +	$m_1 = 1.25$ -
$m_2 = 0.875$ +	m_1
m_2 +	$m_3 = 1.0626$ -
$m_4 = 0.96875$ +	m_3 -

b) $s = 0.90120103173$ und damit $\Delta m_4 = 0.06754$ und somit $r_{m_4} \approx 7.5\%$, eine Dezimale richtig.

Lösung 6

a)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$M = \max_{0\le x\le\sqrt{3}/3} |f''(x)| = 2$, $h_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und $h_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$
$F_{max} \le \frac{b-a}{12}\,h^2\,M = \frac{1}{12}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\,\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\,6 = \frac{\sqrt{3}}{6^3} \approx 0.00801\ldots$

$T_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+1/3}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{24} \approx 0.50518 \quad T_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{12}{13} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right) = \frac{187}{6\cdot 104}\sqrt{3} \approx 0.51906\ldots$

exakter Wert $I = \frac{\pi}{6} \approx 0.52359877560$ und damit: tatsächlicher Fehler: $0.004538\ldots$ nur die Hälfte das max möglichen Fehlers.

b) $S_1 = \frac{1}{3}\,(4\cdot T_1 - T_0) = \frac{1}{3}\,\frac{283}{312}\,\sqrt{3} \approx 0.523683\ldots$
tatsächlicher Fehler: $8.753 \cdot 10^{-5}$