Klassen MI1a/MT1a **4 - te DMa - Klausur** 25. Juni 2004

Name:

Aufgabe 1

$F(x) = \sqrt{2 \cdot e^{-x}}$ hat in $[a, b] = [0.5, 2]$ einen Fixpunkt.

a) Bestimmen Sie mit *Bisektion* (4 Schritte) einen Startwert für die Iteration $x = F(x)$, graphische Darstellung der neuen Mitten, Einheit auf der $x-$Achse $1 \widehat{=} 10cm$

b) Wie gross ist der relative Fehler dieses Startwerts?

Aufgabe 2

Berechnen Sie

$$I = \int_0^1 e^{-x}\, dx$$

mit einer *Obersumme*. Dabei soll das Intevall $[0, 1]$ in n gleichlange Teile zerlegt werden. (Resultat *so einfach, wie möglich*).

Aufgabe 3

$$f(t) = \cos(t) \qquad f^{-1}(t) = ?$$

In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven $C_1 :\ y = f(t)$ und $C_2 :\ y = f^{-1}(t)$, graphische Darstellung (Einheiten auf beiden Achsen: $1 \widehat{=} 4$ Häuschen).
Benützen Sie die Methode von *Newton*, Startwert $t_0 = 0.2$, *alle* Zwischenresultate, auf Rechner-Genauigkeit.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die ersten beiden Trapezwerte ($0-$te und $1-$te Halbierung) für das Integral

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

a) Geben Sie für die $1-$te Halbierung den maximal möglichen Fehler an und vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Fehler.

b) Geben Sie den ersten Simpsonwert S_1 an und geben Sie für diesen Wert den tatsächlichen Fehler an.

Aufgabe 5

Die Gleichung $x^2 - 1 - \cos(x) = 0$ hat eine Lösung im Intervall $[1, 1.5]$. Welche der angegebenen *Iterationsvorschriften* (evtl. auch mehrere) kann man zur Bestimmung dieser Lösung verwenden? (*mit* Begründung, Satz über das Iterationsverfahren)

$$\text{a)} \quad x_{k+1} = \frac{1 + \cos(x_k)}{x_k} \qquad \text{b)} \quad x_{k+1} = \sqrt{1 + \cos(x_k)} \qquad \text{c)} \quad x_{k+1} = 1 + \frac{\cos x_k}{x_k + 1}$$

d) Wieviele Schritte müssten Sie für $7-$stellige Genauigkeit durchführen, falls Sie das angebene Intervall für eine *Bisektion* verwenden würden?

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Gewichte $w_k \in \mathbb{R}$ so, dass die Integrationsformel

$$Q = w_0\, f\left(-\frac{3h}{4}\right) + w_1\, f\left(-\frac{h}{4}\right) + w_2\, f\left(\frac{h}{4}\right) + w_3\, f\left(\frac{3h}{4}\right)$$

jedes Polynom höchstens $3-$ten Grades auf $[-h, h]$ exakt integriert, *exakte* Angaben.
Testen Sie Q mit $p_3(\xi) = a_0 + a_1\, \xi + a_3\, \xi^3$, $-h \le \xi \le h$