Lösung 1

a) $x = F(x)$, also $f(x) = F(x) - x$ Bisektion:

Wert links	Wert rechts
0.5 +	2 -
0.5 +	$m_1 = 1.25$ -
$m_2 = 0.875$ +	m_1
m_2 +	$m_3 = 1.0626$ -
$m_4 = 0.96875$ +	m_3 -

b) $s = 0.90120103173$ und damit $\Delta m_4 = 0.06754$ und somit $r_{m_4} \approx 7.5\%$, eine Dezimale richtig.

Lösung 2

$\Delta x = \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} O_n &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \\ &= \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\cdot\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{e}\right)^{k\cdot\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1-1/e}{1-e^{1/n}} \quad \text{geometrische Teilsumme mit} \quad q := \left(\frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

Lösung 3

$f^{-1}(t) = \arccos(t)$
Zu lösende Gleichung $\cos(t) = t$ und damit: $g(t) := \cos(t) - t$
Newton:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{\cos(t_k) - t_k}{-\sin(t_k) - 1}$$

t_k	
t_0	0.2
t_1	0.850777...
t_2	0.74153019...
t_3	0.739086449...
t_4	0.73908513321554
t_5	0.73908513321516 $= t_6$

Somit ist $S(t_5/t_5)$. $m_1 = \frac{d}{dt} f(t_5)$ und $m_2 = \frac{1}{m_1}$ und damit $\varphi_1 = 0.592795\ldots$ und $\varphi_2 = 1.1448\ldots$
$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \arctan(m_2) - \arctan(m_1) = 0.55203\ldots$ Bogenmass bzw. $\varphi \approx 31.629^o$

Lösung 4

a)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \qquad f''(x) = \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{5/2}}$$

$M = \max_{0\le x\le\sqrt{2}/2} |f''(x)| = 8\sqrt{2}$, $h_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $h_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$
$F_{max} \le \frac{b-a}{12} h^2 M = \frac{1}{12} \approx 0.0833\ldots$

$$T_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 0.853553 \quad T_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{2} + 2\,\frac{\sqrt{14}}{7} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0.804741$$

exakter Wert $I = \frac{\pi}{4} \approx 0.78539816339745$ und damit: tatsächlicher Fehler: $0.0193430\ldots$ nur ein Viertel das max möglichen Fehlers.

b) $S_1 = \frac{1}{3}\,(4 \cdot T_1 - T_0) = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\left(\frac{1}{2} + 2\,\frac{\sqrt{14}}{7} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,-\,\frac{\sqrt{2}}{12}\,\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 0.788470\ldots$
tatsächlicher Fehler: $0.00307\ldots$

Lösung 5

$s = 1.176501\ldots$,
Satz über das Iterationsverfahren: ii) für alle drei Iterationen erfüllt, i) bei a) verletzt, bleibt nur iii) zu prüfen:

a)

$$F_a'(x) = \frac{-\sin(x)\cdot x - 1 - \cos(x)}{x^2} \qquad F_a'(1) = -2.38\ldots \qquad F_a(1.5) = -1.14\ldots$$

d.h. abstossender Fixpunkt, kann nicht verwendet werden.

b)

$$F_b'(x) = \frac{-\sin(x)}{2\,\sqrt{1+\cos(x)}} \qquad F_b'(1) = -0.339\ldots \qquad F_b(1.5) = -0.48\ldots$$

d.h. attraktiver Fixpunkt, kann verwendet werden.

c)

$$F_c'(x) = \frac{-\sin(x)\cdot(x+1) - \cos(x)}{(x+1)^2} \qquad F_c'(1) = -0.55\ldots \qquad F_c(1.5) = -0.41\ldots$$

d.h. attraktiver Fixpunkt, kann verwendet werden.

d)

$$n > \ln\left|\frac{0.5}{5\cdot 10^{-8}}\right| \cdot \frac{1}{\ln(2)} \simeq 23.25 \qquad \text{also} \quad n = 24$$

Lösung 6

zu lösendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 2\,h \\ -3w_0 - w_1 + w_2 + 3w_3 = 0 \\ 9w_0 + w_1 + w_2 + 9w_3 = \frac{32}{3}\,h \\ -27w_0 - w_1 + w_2 + 27w_3 = 0 \end{cases}$$

mit Gauss: $w_0 = w_3 = \frac{13}{24}\,h$ und $w_1 = w_2 = \frac{11}{24}\,h$

$$\int_{-h}^{h} p_3(\xi)\,d\xi = w_0\,p_3\left(-\frac{3h}{4}\right) + w_1\,p_3\left(-\frac{h}{4}\right) + w_2\,p_3\left(\frac{h}{4}\right) + w_3\,p_3\left(\frac{3h}{4}\right)$$

mit

$$p_3\left(-\frac{3h}{4}\right) = a_0 - a_1\,\frac{3h}{4} - a_3\,\left(\frac{3h}{4}\right)^3$$

$$p_3\left(-\frac{h}{4}\right) = a_0 - a_1\,\frac{h}{4} - a_3\,\left(\frac{h}{4}\right)^3$$

$$p_3\left(\frac{h}{4}\right) = a_0 + a_1\,\frac{h}{4} + a_3\,\left(\frac{h}{4}\right)^3$$

$$p_3\left(\frac{3h}{4}\right) = a_0 + a_1\,\frac{3h}{4} + a_3\,\left(\frac{3h}{4}\right)^3$$

erhält man $a_0\,(w_0 + w_1 + w_2 + w_3) = a_0\,2h$
Ungerade Potenzen in ξ ergeben über ein zum Ursprung symmetrisches Intervall integriert immer Null.