

--	--	--	--	--	--	--	--

Name:

Aufgabe 1a) Gegeben sind die 4 Matrizen A , B , C und D

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad B = (1 \ 2 \ -3) \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie *alle* möglichen Produkte zweier Matrizen.b) Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^{11} **Aufgabe 2**a) Schreiben Sie s mit dem Summenzeichen

$$s = 1 - \frac{1}{2} (2 \cdot 3x - 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 - 5 \cdot 6x^4 \pm \dots)$$

mit $n + 1$ Summanden.

b) Bestimmen Sie folgende Produkte

$$\text{i) } p_5 = \prod_{k=2}^5 \left(\frac{1}{k} + 1 \right) \quad \text{ii) } p_n = \prod_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} + 1 \right)$$

Aufgabe 3Zu den Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $C = 12 \cdot I_2$ bestimme man B so, dass gilt:

$$A^T B + B A = -C$$

Was hat B für Eigenschaften?**Aufgabe 4**

a) Berechnen sie die Grössen

$$\text{i) } z = \sum_{k=2}^6 \left(\prod_{i=2}^k (i-1) \right) \quad \text{ii) } s = \left\{ \sum_{k=-7}^{-3} (k+3)^2 \right\}^2$$

b) Wie gross muss n sein, damit

$$\sum_{k=1}^n (k+4) = 95$$

Aufgabe 5 L is eine untere $n \times n$ -Dreiecksmatrix und U eine obere $n \times n$ -Dreiecksmatrix.a) Was entsteht bei der Multiplikation von L mit U ? Gibt es Null-Elemente?b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand bei dieser Matrizenmultiplikation (*nur* die Anzahl Multiplikationen).**Aufgabe 6**

$$\text{Gegeben: } \sum_{k=1}^{17} (4x_k + 2) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=-1}^{15} (2x_{j+2} - 1)^2 = 0$$

$$\text{Gesucht: } s = \sum_{i=1}^{17} \left\{ x_i + 3 \cdot \sum_{k=1}^{17} (1 - 2x_k)^2 \right\}$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Summe

$$s_N = \sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=n+1}^{2n} 2k \right)$$

Aufgabe 8

$$\text{Gegeben: } \sum_{j=1}^{20} (5x_j - 1) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{20} (4x_j - 1)^2 = 0$$

$$\text{Gesucht: } s = \sum_{k=1}^{20} \left\{ 2x_k - 3 \cdot \sum_{j=1}^{20} (-x_j + 1)^2 \right\}$$

Lösung 1

- a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$, $CA = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $BD = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}^T$, $C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D^2 = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$
 A^2, B^2, BA, AC, DB, CD , und DC sind nicht definiert.
- b) $A^2 = -I_2, A^3 = -A, A^4 = I_2, A^5 = A, \dots, A^8 = I_2, A^9 = A, A^{10} = -I_2$ und $A^{11} = -A = A^T$, d.h. A ist schiefssymmetrisch.

Lösung 2

a)

$$s = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k k(k+1)x^{k-1}$$

- b) i) $p_5 = 3$ und ii) $p_n = \frac{n+1}{2}$

Lösung 3

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B^T = B, \text{ d.h. } B \text{ ist symmetrisch.}$$

Lösung 4

- a) i) $z = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153$ und
 ii) $s = ((-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2)^2 = 30^2 = 900$
- b) $\frac{n(n+1)}{2} + 4n = 95$, also $n^2 + 9n - 190 = (n+19)(n-10) = 0$ und damit $n = 10$, da $n > 0$ sein muss.

Lösung 5

a) $A = L \cdot U$ ist vollbesetzt, es gibt keine Nullen (i. allg.).

1-te Zeile:	$1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1$	$=$	$n \cdot 1$
2-te Zeile:	$1 + 2 + 2 + 2 + \dots + 2$	$=$	$1 + (n-1) \cdot 2$
3-te Zeile:	$1 + 2 + 3 + 3 + \dots + 3$	$=$	$1 + 2 + (n-2) \cdot 3$
...			
i -te Zeile:	$1 + 2 + \dots + (i-1) + i \dots + i$	$=$	$1 + 2 + \dots + (i-1) + (n-i+1) \cdot i$
n -te Zeile:	$1 + 2 + \dots + n$	$=$	$1 + 2 + \dots + 1 \cdot n$

Aufwand: $\sum_{i=1}^n (n-i+1) \cdot i$ und $\sum_{i=2}^n \left(\sum_{k=1}^{i-1} k \right)$ mit Summation horizontal oder

$\sum_{i=1}^n (n-i+1) \cdot i$ und $\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \cdot i$ mit Summation vertikal

Gesamtaufwand: $\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+1}{3} = \sum_{k=1}^n k^2$

Lösung 6

$$\sum_{k=1}^{17} x_k = -\frac{17}{2} \quad \sum_{j=1}^{17} x_j^2 = -\frac{51}{4} \quad (\text{wird aber nicht gebraucht}) \quad s = -\frac{17}{2}$$

Lösung 7

$$s_N = 2 \cdot \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} = 3 \cdot \sum_{n=1}^N n^2 + \sum_{n=1}^N n = N(N+1)^2$$

Lösung 8

$$\sum_{j=1}^{20} x_j = 4 \quad \sum_{j=1}^{20} x_j^2 = \frac{3}{4} \quad -3 \cdot \sum_{j=1}^{20} (x_j^2 - 2x_j + 1) = -3 \cdot \frac{3}{4} + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 20 = -\frac{153}{4}$$

$$s = 2 \cdot \sum_{k=1}^{20} x_k - 20 \cdot \frac{153}{4} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 153 = -757$$