Klasse DP1a **NMMa1 - 2-te Klausur** 2. Februar 2005

Name:

Aufgabe 1

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

a) Für welche rechte Seiten b hat das gegebene Gleichungssystem Lösungen? $m =?$, $n =?$ und $r =?$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) b_2 und anschliessend für $b = \begin{pmatrix} -1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Lösungen.

Aufgabe 2

Betrachten Sie das folgende homogene lineare Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 5x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 6x_4 & + & 10x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 9x_4 & - & 6x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 11x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen dieses Gleichungssystems, $r = ?$

b) Welche Bedingungen muss $b \in \mathbb{R}^4$ erfüllen, damit das inhomogene Gleichunssystem $Ax = b$ Lösungen hat?

c) Ist eine eindeutige Lösung möglich? (*mit* Begründung)

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die *positiven* Grössen a, b, c, d und e so, dass

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & a & c \\ \frac{1}{3} & 0 & -d \\ \frac{2}{3} & -b & e \end{pmatrix}$$ orthogonal wird, d.h. dass $B^T B = I_3$.

b) Was erhalten Sie für $B\,B^T$? (mit Begründung!)

c) Lösen Sie mit B aus a) das lineare Gleichungssystem $Bx = c$ mit $c = (1,\ 0,\ -1)^T$

bitte wenden!

Aufgabe 4

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die $LR-$Zerlegung von A, *ohne* Zeilenpermutationen.

b) Lösen Sie mit Hilfe von a) das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b^T = (1,\ 0,\ 1,\ b_4)$

c) Wie gross muss b_4 sein, damit es Lösungen gibt.

Aufgabe 5

a) Seien A und B zwei $n \times n-$Matrizen. Wieviele wesentliche Operationen (nur Multiplikationen) sind zur Bildung von $C = A \cdot B$ nötig ?

b) Seien nun A und B zwei *obere* $n \times n-$Dreiecksmatrizen. Wieviele wesentliche Operationen (nur Multiplikationen) werden jetzt zur Bildung von $C = A \cdot B$ benötigt ?

Aufgabe 6

a) Seien A und B zwei symmetrische $n \times n-$Matrizen. Was muss gelten, damit $C = A \cdot B$ symmetrisch ist?

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von A mit dem Gauss-Algorithmus. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das überhaupt möglich ?

Lösung 1

Endschema:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	0	-2	3	1	b_1
0	-3	6	-6	0	$b_2 - 2b_1$
0	0	0	0	0	$-3b_1 - b_2 + b_3$

$m = 3$, $n = 5$ und $r = 2$

a) Es gibt Lösungen, falls $-3b_1 - b_2 + b_3 = 0$

b) $b_2 = 4$, $r = 2$, drei freie Parameter, $x_3 = \mu$, $x_4 = \nu$ und $x_5 = \lambda$, damit $x_1 = -1 + 2\mu - 3\nu - \lambda$ und $x_2 = -2 + 2\mu - 2\nu$

Lösung 2

a) Endschema für $Ax = 0$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	-2	-5	1	0
0	1	4	-1	9	0
0	0	1	1/2	2	0

$m = 4$, $n = 5$ und $r = 3$

Endschema in `rref`:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	0	0	2	3	0
0	1	0	-3	1	0
0	0	1	1/2	2	0

zwei freie Parameter: $x_4 = \mu$ und $x_5 = \nu$, damit: $x_1 = -2\mu - 3\nu$, $x_2 = 3\mu - \nu$ und $x_3 = -\frac{1}{2}\mu - 2\nu$

b) Endschema für $Ax = b$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	-2	-5	1	b_1
0	1	4	-1	9	$b_2 - b_1$
0	0	-2	-1	-4	$b_3 + 2b_1$
0	0	0	0	0	$4b_1 + b_3 + b_4$

D.h. VB: $4b_1 + b_3 + b_4 = 0$, sonst gibt es keine Lösungen.

c) Eine eindeutige Lösung ist nicht möglich, da $r = 3 < n$.

Lösung 3

a) $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = e = \frac{\sqrt{2}}{6}$ und $d = \frac{4\sqrt{2}}{6}$

b) B ist orthogonal, d.h. es gilt mit a): $B^T B = I_3$. B ist mit ihrer Inversen vertauschbar, d.h. es gilt: $B^T B = B\, B^T = I_3$

c) $x = B^T c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung 4

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $Lc = b$: $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $c_4 = b_4 + 2 = 0$, d.h. $b_4 = -2$

c) $b_4 = -2$: $x_1 = -4 + \mu$, $x_2 = -3 + \mu$ $x_3 = -2 + \mu$, $x_4 = \mu$, freier Parameter.

Lösung 5

a) pro Matrix-Element c_{ij}: n Multiplikationen, insgesamt werden n^2 Elemente gerechnet, also Gesamtaufwand: n^3

b) das Produkt ist wieder eine obere Dreiecksmatrix

$1-$te Zeile: $1 + 2 + 3 + \ldots + n$
$2-$te Zeile: $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)$
$3-$te Zeile: $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2)$
$j-$te Zeile: $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - j + 1)$
$n-$te Zeile: 1

zu summieren sind folgende Zahlen (schematisch dargestellt):

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 \\ & & 1 & 2 & \ldots & n-2 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \\ & & & & & 1 \end{array}$$

Gesamtaufwand: $\sum_{j=1}^{n} (n - j + 1)\, j = \frac{1}{6}\,(n^3 + 3n^2 + 2n)$

Lösung 6

a) $C = A \cdot B$, $C^T = (A \cdot B)^T = B^T\, A^T = B \cdot A$, $C^T = C$, falls $A \cdot B = B \cdot A$, d.h. falls A und B kommutieren.

b) für $a \neq 0$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & -1/a^2 \\ a & -1 & 1/a \\ -a^2 & a & 0 \end{pmatrix}$