

--	--	--	--	--	--	--	--

Name:

Aufgabe 1

Eine Ebene E durch den Nullpunkt ist orthogonal zu $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix S bzgl. der Standardbasis Σ_e der Spiegelung an E .
- Geben Sie eine neue Basis Σ_{neu} an, so dass die Abbildungsmatrix S_{neu} möglichst einfach wird.

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ a & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A .
- Bestimmen Sie – in Abhängigkeit des Parameters a – zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren.
- Für welche Werte von a ist die Matrix A diagonalisierbar? (mit Begründung)

Aufgabe 3

Sei $P_2 =$ Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 definiert auf dem Intervall $[0, 1]$
Eine lineare Abbildung $\mathcal{F} : P_2 \rightarrow P_2$ ist definiert mit

$$(\mathcal{F}(p))(x) := p(1-x) - x^2 \cdot p''(x)$$

- Betrachten Sie die Monome als Erzeugendensystem und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F bzgl. dieser Basis.
- Bestimmen Sie das Bild und den Kern dieser Abbildung.
- Für welche $p(x)$ gilt $\mathcal{F}(p) = c \cdot p$?

bitte wenden

Aufgabe 4

$V = C^1[-1, 0]$, seien $p(x), q(x) \in V$

a) Ist durch

$$(p, q) := p(0) \cdot q(-1) + \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^0 p'(x) \cdot q(x) dx$$

ein Skalarprodukt definiert? Begründung!

b) Sind im Vektorraum der Polynome P_2 die Funktionen f_1, f_2 und f_3 linear abhängig oder linear unabhängig? Begründung!

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & f_1(x) = x^2 + 1 & f_2(x) = (x + 1)^2 & f_3(x) = (x - 1)^2 \\ \text{ii)} & f_1(x) = (x + 2)^2 & f_2(x) = (x + 1)^2 & f_3(x) = (x - 1)^2 \end{array}$$

Aufgabe 5

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

a) Lösen Sie das gegebene Differentialgleichungssystem durch Entkopplung. (Hornerschema für die EW)

b) Für welche Anfangsbedingungen streben alle Lösungen gegen Null?

Aufgabe 6

Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) := 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 26x_1 - 4x_2 + 5$$

$Q(x_1, x_2) = 0$ definiert eine Kurve in \mathbb{R}^2 .

a) Um was für eine Kurve handelt es sich hier?

b) Hauptachsentransformation und graphische Darstellung.

Lösung 1

a) $S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, S ist orthogonal: $S^{-1} = S^T$, $S = S^T$, symmetrisch, $S^2 = I_3$, da S eine Spiegelung beschreibt.

b) Σ_{neu} : $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T = (b_1, b_2, b_3)$
spaltenweise
 $S_{neu} = T^{-1}ST = \text{diag}(1, 1, -1)$

Lösung 2

a) $\lambda_{1,2} = 6$, doppelter EW und $\lambda_3 = -2$, einfacher EW

b) $\lambda_3 : v^{(3)} = (-1, \frac{a}{8}, 1)^T$

$\lambda_{1,2}$: $a \neq 0$, nur ein EV: $x_1 = x_3 = 0$ und $x_2 \in \mathbb{R}$, also $v^{(1)} = (0, 1, 0)^T$,
geom VF = 1 < alg VF = 2

$\lambda_{1,2}$: $a = 0$, zwei linear unabhängige EV, nämlich $x_1 = x_3$ und $x_2 \in \mathbb{R}$, also
 $v^{(1)} = (1, 0, 1)^T$ und $v^{(1)} = (0, 1, 0)^T$, geom VF = alg VF = 2

c) A ist diagonalisierbar genau dann, wenn geom VF = alg VF für jeden EW, d.h. für $a = 0$.

Lösung 3

Basis $e_1 = 1$, $e_2 = x$ und $e_3 = x^2$

a) $\mathcal{F}(e_1) = 1 = e_1$, $\mathcal{F}(e_2) = 1 - x = e_1 - e_2$, $\mathcal{F}(e_3) = 1 - 2x - x^2 = e_1 - 2e_2 - e_3$

und damit $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\text{Kern}(F) = 0$ und $\text{Bild}(F) = P_2$, da F regulär.

c) EWP von F , d.h. $Fx = \lambda x$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -1$

$v^{(1)} = \mu (1, 0, 0)^T$, $p_1(x) = \alpha$, $\mathcal{F}(p_1(x)) = 1 \cdot p_1(x)$

$v^{(2)} = \mu (1, -2, 0)^T$, $p_2(x) = \alpha(1 - 2x)$, $\mathcal{F}(p_2(x)) = (-1) \cdot p_2(x)$

Lösung 4

a) nein, denn $(p, q) \neq (q, p)$

b) $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$

i) linear abhängig:

$$x^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x \cdot (2\alpha_2 - 2\alpha_3) + 1 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

ii) lin unabhängig:

$$x^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x \cdot (4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3) + 1 \cdot (4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

Lösung 5

a) EWP von der System-Matrix A : $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8$

EW $p_A(\lambda) = 0$, mit Horner: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8$

$E_{-1} = \text{span} \{(1, -2, 0)^T, (0, -2, 1)^T\} = \text{span} \{v^{(1)}, v^{(2)}\}$ und $E_8 = \text{span} \{(1, \frac{1}{2}, 1)^T\} = \text{span} \{v^{(3)}\}$,

also $x_h(t) = c_1 e^{-t} v^{(1)} + c_2 e^{-t} v^{(2)} + c_3 e^{8t} v^{(3)}$

b) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $c_3 = 0$.

Lösung 6

a) EWP von $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, Ellipse, da $\det(A) = 36$, $\lambda_1 = 9$ und $\lambda_2 = 4$

b) EV $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ und damit $T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, orthogonal, $x = Ty$

T ist eine Drehung um den Winkel $\varphi = \arctan(-2)$, ($\tan(\varphi) = -2$)

Kegelschnitt bzgl. im neuen Koordinatensystem:

$$9 \left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4 \left(x_2 - \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36$$

somit $a = 2$ und $b = 3$.

$M_{neu}(\frac{1}{\sqrt{5}}/\frac{7}{\sqrt{5}})$ und $M_{alt}(3/1)$, also Translation $\vec{t} = (3, 1)^T$