Klasse DP2a **NMMa3 - 2-te Klausur** 20. Januar 2005

Name:

erster Teil: ohne MATLAB

Aufgabe 1

a) Wie lauten die Bedingungen für die drei Parameter a, c_1 und c_2 des $2-$stufigen Runge-Kutta Verfahrens

$$\begin{cases} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + ah, y_k + ahk_1) \\ y_{k+1} &= y_k + h\ \{c_1 k_1 + c_2 k_2\} \end{cases}$$

damit es maximale Fehlerordnung hat?

b) Erklären Sie, dass die Fehlerordnung höchstens 2 ist.

c) Als Spezialfälle sind sowohl die Methode von Heun, als auch die verbesserte Polygonzugmethode abzuleiten.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa(A)$ bzgl. der $2-$Norm in Abhängigkeit des Parameters a

b) Bestimmen Sie die speziellen Werte der Kondition von A für $a = -\frac{1}{2}$, $a = -\frac{9}{10}$ und $a = -\frac{99}{100}$ mit Hilfe von a).

c) Wohin strebt die Kondition $\kappa(A)$ für $a \longrightarrow -1$

zweiter Teil: mit MATLAB

d) Vergleich mit der $2-$Norm von A mit `MATLAB`.

Aufgabe 3

Betrachten Sie das folgende Problem:

$$y' = -50 \cdot (y - \cos(x)) \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 0.$$

- Die Schrittweite soll *adaptiv* gesteuert werden mit den beiden eingebetteten Verfahren Verbesserte Polygonzugmethode (VP) und Runge-Kutta (RK) der Ordnung $p = 3$, vgl. Theorie.
- Der lokale Diskretisationsfehler d_{k+1} soll in jedem Schritt betragsmässig kleiner als $tol = 10^{-5}$ sein.

a) Steuerung: Falls die Schätzung für $|d_{k+1}| > tol$, soll die Schrittweite halbiert werden.
Ist $|d_{k+1}| < tol$, soll die Schrittweite verdoppelt werden.

b) Starten Sie mit einer Versuchsschrittweite $h = 0.1$ und führen Sie 100 Integrationsschritte durch, graphische Darstellung der globalen Fehler.

c) Vergleichen Sie Ihre Zeitschritte mit denjenigen von ode23 für das gleiche Problem mit $tol = 10^{-4}$, graphische Darstellung der verwendeten Schrittweiten für beide Verfahren.

Aufgabe 4

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ a & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie – in Abhängigkeit des Parameters a – zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren.

c) Für welche Werte von a ist die Matrix A diagonalisierbar? (*mit* Begründung)

Aufgabe 5

Sei $P_2 =$ Vektorraum derPolynome vom Grad ≤ 2 definiert auf dem Intervall $[0, 1]$
Eine *lineare* Abbildung $\mathcal{F}: \ P_2 \longrightarrow P_2$ ist definiert mit

$$(\mathcal{F}(p))(x) := p(1-x) - x^2 \cdot p''(x)$$

a) Betrachten Sie die Monome als Erzeugendensystem und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F bzgl. dieser Basis.

b) Bestimmen Sie das Bild und den Kern dieser Abbildung.

c) Für welche $p(x)$ gilt $\mathcal{F}(p) = c \cdot p$?

bitte wenden

Aufgabe 6

$V = C^1[-1,0]$, seien $p(x),\ q(x) \in V$

a) Ist durch

$$(p,q) := p(0) \cdot q(-1) + \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{0} p'(x) \cdot q(x)dx$$

ein *Skalarprodukt* definiert? Begründung!

b) Sind im Vektorraum der Polynome P_2 die Funktionen f_1, f_2 und f_3 *linear abhängig* oder *linear unabhängig*? Begründung!

$$\begin{array}{rlll} \text{i)} & f_1(x) = x^2 + 1 & f_2(x) = (x+1)^2 & f_3(x) = (x-1)^2 \\ \text{ii)} & f_1(x) = (x+2)^2 & f_2(x) = (x+1)^2 & f_3(x) = (x-1)^2 \end{array}$$

Aufgabe 7

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \dot{x}_1 & = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 \\ \dot{x}_2 & = & 2x_1 & & & + & 2x_3 \\ \dot{x}_3 & = & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 \end{array} \right.$$

a) Lösen Sie das gegebene Differentialgleichungssystem durch Entkopplung. (Hornerschema für die EW)

b) Für welche Anfangsbedingungen streben alle Lösungen gegen Null?

Aufgabe 8

Gegeben ist die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) := 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 26x_1 - 4x_2 + 5$$

$Q(x_1, x_2) = 0$ definiert eine Kurve in $\mathbb{R}^2$.

a) Um was für eine Kurve handelt es sich hier?

b) Hauptachsentransformation und graphische Darstellung.

Lösung 1

a) $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, S ist orthogonal: $S^{-1} = S^T$, $S = S^T$, symmetrisch, $S^2 = I_3$, da S eine Spiegelung beschreibt.

b) Σ_{neu}: $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T = (b_1, b_2, b_3)$ spaltenweise
$S_{neu} = T^{-1}ST = diag(1, 1, -1)$

Lösung 2

a) $\lambda_{1.2} = 6$, doppelter EW und $\lambda_3 = -2, einfacher EW$

b) $\lambda_3 : v^{(3)} = (-1,\ \frac{a}{8},\ 1)^T$
$\lambda_{1.2}$: $a \neq 0$, nur *ein* EV: $x_1 = x_3 = 0$ und $x_2 \in \mathbb{R}$, also $v^{(1)} = (0,\ 1,\ 0)^T$, geom VF $= 1 <$ alg VF $= 2$
$\lambda_{1.2}$: $a = 0$, zwei linear unabhängige EV, nämlich $x_1 = x_3$ und $x_2 \in \mathbb{R}$, also $v^{(1)} = (1,\ 0,\ 1)^T$ und $v^{(1)} = (0,\ 1,\ 0)^T$, geom VF $=$ alg VF $= 2$

c) A ist diagonalisierbar genau dann, wenn geom VF $=$ alg VF für jeden EW, d.h. für $a = 0$.

Lösung 3

Basis $e_1 = 1$, $e_2 = x$ und $e_3 = x^2$

a) $\mathcal{F}(e_1) = 1 = e_1$, $\mathcal{F}(e_2) = 1 - x = e_1 - e_2$, $\mathcal{F}(e_3) = 1 - 2x - x^2 = e_1 - 2e_2 - e_3$
und damit $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $Kern(F) = 0$ und $Bild(F) = P_2$, da F regulär.

c) EWP von F, d.h. $Fx = \lambda x$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2.3} = -1$
$v^{(1)} = \mu\,(1,\ 0,\ 0)^T$, $p_1(x) = \alpha$, $\mathcal{F}(p_1(x)) = 1 \cdot p_1(x)$
$v^{(2)} = \mu\,(1,\ -2,\ 0)^T$, $p_2(x) = \alpha(1 - 2x)$, $\mathcal{F}(p_2(x)) = (-1) \cdot p_2(x)$

Lösung 4

a) nein, denn $(p, q) \neq (q, p)$

b) $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$
i) linear abhängig:
$x^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x \cdot (2\alpha_2 - 2\alpha_3) + 1 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$
ii) lin unabhängig:
$x^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x \cdot (4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3) + 1 \cdot (4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$

Lösung 5

a) EWP von der System-Matrix A: $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8$
EW $p_A(\lambda) = 0$, mit Horner: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 8$
$E_{-1} = span\left\{(1,\ -2\ 0)^T, (0,\ -2,\ 1)^T\right\} = span\left\{v^{(1)}, v^{(2)}\right\}$ und $E_8 = span\left\{(1,\ \frac{1}{2},\ 1)^T\right\} = span\left\{v^{(3)}\right\}$,
also $x_h(t) = c_1 e^{-t} v^{(1)} + c_2 e^{-t} v^{(2)} + c_3 e^{8t} v^{(3)}$

b) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $c_3 = 0$.

Lösung 6

a) EWP von $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, Ellipse, da $det(A) = 36$, $\lambda_1 = 9$ und $\lambda_2 = 4$

b) EV $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ und damit $T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, orthogonal, $x = Ty$
T ist eine Drehung um den Winkel $\varphi = \arctan(-2)$, $(\tan(\varphi) = -2)$
Kegelschnitt bzgl. im neuen Koordinatensystem:

$$9\,(y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + 4\,(x_2 - \frac{7}{\sqrt{5}})^2 = 36$$

somit $a = 2$ und $b = 3$.
$M_{neu}(\frac{1}{\sqrt{5}}/\frac{7}{\sqrt{5}})$ und $M_{alt}(3/1)$, also Translation $\vec{t} = (3,\ 1)^T$