Klasse ET1b **DMa1 1-te Klausur** 14. Januar 2005

Name:

Aufgabe 1

a) Gegeben sind die 4 Matrizen A, B, C und D

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad B = (1 \;\; 2 \;\; -3) \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie *alle* möglichen Produkte zweier Matrizen.

b) Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^{11}

Aufgabe 2

Zu den Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $C = 12 \cdot I_2$ bestimme man B so, dass gilt:

$$A^T B + BA = -C$$

Was hat B für Eigenschaften?

Aufgabe 3

a) Bei der Lösung von $Ax = b$ erhält Student Slaviero

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

und behauptet, damit die `rref` bestimmt zu haben. Studentin Bäuerle widerspricht ihm.
Wer hat Recht (**mit** Begründung). Falls Studentin Bäuerle recht hat: wie sieht die `rref` aus?
Bestimmen Sie zudem m, n und r, geben Sie die Lösungen an.

b) Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Gesucht: B so, dass $AB = BA$, **alle** Lösungen. Was ist an B speziell?

bitte wenden!

Aufgabe 4

Rechenaufwand für das Rückwärtseinsetzen:
Gegeben ist ein Endschema für n Gleichungen mit n Unbekannten, $\mathbf{ohne}$ vorzeitigen Abbruch, i.e.

$$\begin{array}{ccccc} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} & c_1 \\ & r_{12} & \dots & r_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & r_{nn} & c_n \end{array}$$

Bestimmen Sie die Anzahl wesentlicher Operationen (= Anzahl Divisionen und Mulktiplikationen), die für das Rückwärtseinsetzen zur Bestimmung der Lösung x nötig ist. ($\mathbf{mit}$ Begründung)

Aufgabe 5

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & ax_2 & + & bx_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2ax_2 & + & bx_3 & = & 2+a \\ -x_1 & + & ax_2 & - & x_3 & = & 2a-1-b \end{array} \right.$$

a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ hat die Lösungsmenge zwei freie Parameter?

b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge von der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

Geben Sie in den Fällen a) und b) die Lösungen an.

Aufgabe 6

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & b \\ & & x_2 & + & ax_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

Für welche Werte der Systemparameter gibt es

a) keine Lösung

b) $\infty-$viele mit wievielen freien Parametern

c) genau eine Lösung

b) und c) $\mathbf{mit}$ Angabe der jeweiligen Lösungen. Geben Sie den entsprechenden Rang an.

DMa1 Lösungen 1-te Klausur

Lösung 1

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$, $CA = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $BD = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}^T$, $C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D^2 = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

A^2, B^2, BA, AC, DB, CD, und DC sind nicht definiert.

b) $A^2 = -I_2$, $A^3 = -A$, $A^4 = I_2$, $A^5 = A$, $\ldots$ $A^8 = I_2$, $A^9 = A$, $A^{10} = -I_2$ und $A^{11} = -A = A^T$, d.h. A ist schiefsymmetrisch.

Lösung 2

zu lösendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2a & + & b & + & c & & & = & -12 \\ & - & 3b & & & + & d & = & 0 \\ & & & - & 3c & + & d & = & 0 \\ & & & & & - & 4d & = & -12 \end{array}$$

$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B^T = B$, d.h. B ist symmetrisch.

Lösung 3

a) Bäuerle hat recht

Endschema in `rref`:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	-4	0	1
0	1	2	0	0
0	0	0	1	1

$m = 3$, $n = 4$ und $r = 3$

$\infty-$ viele Lösungen mit einem freien Parameter: $x_3 = \mu$, $x_4 = 1$, $x_2 = -2\mu$ und $x_1 = 1 + 4\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$

b) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\quad a, b \in \mathbb{R}$, d.h. B ist eine obere Dreiecksmatrix.

Lösung 4

Zur Bestimmung von
$$x_n = \frac{c_n}{r_{nn}}$$
wird eine Division durchgeführt, also 1 w.O.
Zur Bestimmung von
$$x_{n-1} = \left(c_{n-1} - r_{n-1,n} \cdot x_n\right) / r_{n-1,n-1}$$
müssen wir eine Multiplikation und eine Division durchführen, also 2 w.O.
Zur Bestimmung von x_{n-2} müssen wir zwei Multiplikationen und eine Division durchführen, also 3 w.O.
...
Zur Bestimmung von
$$x_k = \left(c_k - \sum_{j=k+1}^{n} r_{k,j} \cdot x_j\right) / r_{k,k} \qquad k = n, n-1, \ldots, 1$$
müssen $n-k$ Multiplikationen und eine Division gemacht werden, also $n-k+1$ w.O.
...
Zur Bestimmung von x_1 müssen $n-1$ Multiplikationen und eine Division gemacht werden, also n w.O.
Also insgesamt: $\sum\limits_{k=1}^{n} (n-k+1) = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Lösung 5

a) $a = 0$ und $b = 1$: $x_2 = \mu$, $x_3 = \nu$ und $x_1 = 2 - \nu$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

b) $a \neq 0$ und $b = 1$: $x_3 = \mu$, $x_2 = 1$ und $x_1 = 2 - a - \mu$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$
oder $b \neq 1$ und $a = 0$: $x_2 = \mu$, $x_3 = -1$ und $x_1 = 2 + b$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+b \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

Lösung 6

a) $a = \frac{1}{2}$ und $b \neq 1$: keine Lösung.

b) $a = \frac{1}{2}$ und $b = 1$: $x_3 = \mu$, $x_1 = \frac{1}{2}\mu$ und $x_2 = 1 - \frac{1}{2}\mu$, $\infty-$viele Lösungen mit einem freien Parameter, $r = 2$.
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

c) $a \neq \frac{1}{2}$, $r = 3$:
$$x_1 = \frac{-3a - b + 3ab + 1}{2a-1} \quad x_2 = \frac{3a - ab - 1}{2a-1} \quad x_3 = \frac{b-1}{2a-1}$$