Klasse ET1b **DMa1 2-te Klausur** 4. Februar 2005

Name:

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die **positiven** Grössen a, b, c, d, e und f so, dass

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & d \\ a & b & e \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -c & f \end{pmatrix} \text{ orthogonal ist, d.h. dass } C^T C = I_3.$$

b) Was erhalten Sie für $C\,C^T$?

c) Lösen Sie mit C aus a) das lineare Gleichungssystem $Cx = b$ mit $b = (1,\ 0,\ -1)^T$

Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 6 \\ 4 & -6 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -5 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie L, R und P so, dass $LR = PA$

b) Lösen Sie mit Hilfe der $LR-$Zerlegung aus a) das Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $b = (2,\ 4,\ -1)^T$

Aufgabe 3

für DP1a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

a) Für welche rechte Seiten b hat das gegebene Gleichungssystem Lösungen?

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) b_2 und anschliessend für $b = \begin{pmatrix} -1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Lösungen.

Aufgabe 4

für DP1a

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} & + & sx_2 & + & x_3 & + & t & = & 0 \\ sx_1 & & & + & tx_3 & + & 1 & = & 0 \\ sx_1 & + & sx_2 & + & 2x_3 & + & 2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Geben Sie Bedingungen für die reellen Parameter s und t an, so dass das lineare Gleichungssystem

a) eine Lösung mit *zwei* freien Parametern hat.

b) eine Lösung mit *einem* freien Parameter hat.

c) eine eindeutige Lösung hat.

d) keine Lösung hat.

Geben Sie den jeweiligen Rang des Gleichungssystems an.

Aufgabe 5

für DP1a
Betrachten Sie das folgende homogene lineare Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 5x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 6x_4 & + & 10x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 9x_4 & - & 6x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 11x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen dieses Gleichungssystems, $r = ?$

b) Welche Bedingungen muss $b \in \mathbb{R}^4$ erfüllen, damit das inhomogene Gleichunssystem $Ax = b$ Lösungen hat?

c) Ist eine eindeutige Lösung möglich? (*mit* Begründung)

Aufgabe 6

für DP1a

a) Bestimmen Sie die **positiven** Grössen a, b, c, d und e so, dass

$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & a & c \\ \frac{1}{3} & 0 & -d \\ \frac{2}{3} & -b & e \end{pmatrix}$ orthogonal ist, d.h. dass $B^T B = I_3$.

b) Was erhalten Sie für $B\,B^T$? (Rechnung!)

c) Lösen Sie mit B aus a) das lineare Gleichungssystem $Bx = c$ mit $c = (1,\ 0,\ -1)^T$

Aufgabe 7

für DP1a

a) $I_n = n \times n$ Einheitsmatrix und $A = n \times n-$ Matrix

   i) Zeigen Sie, dass $I_n + A$ und $I_n - A$ bei der Multiplikation vertauschbar sind, d.h. *kommutieren*.

   ii) Sei A eine $n \times n-$ Matrix mit $A^2 = 0$. Bestimmen Sie die *Inverse* von $I_n + A$

b) $H_n = I_n - 2\,\frac{u\,u^T}{u^T u}$, wobei $u \in \mathbb{R}^n$.
Wieviele wesentliche Operationen (Multiplikationen und Divisionen) sind zur Bildung von H_n nötig ?

Aufgabe 8

für DP1a

a) Die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix ist in `rref`.

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Diskutieren Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem $Ax = b$, $m =$, $n =$ und $r =$

b) Was ändert an Ihrer Diskussion in a), falls gleichzeitig für zwei rechte Seiten gelöst wurde.

Aufgabe 9

für DP1a
Bestimmen Sie die Matrix X so, dass die Matrizengleichung $A \cdot X = C$ gilt, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Überlegen Sie sich zuerst, wieviele Zeilen und Spalten X haben muss.

Aufgabe 10

für DP1a

a) Seien A und B zwei $n \times n-$Matrizen. Wieviele wesentliche Operationen (nur Multiplikationen) sind zur Bildung von $C = A \cdot B$ nötig ?

b) Seien nun A und B zwei *obere* $n \times n-$Matrizen. Wieviele wesentliche Operationen (nur Multiplikationen) sind jetzt zur Bildung von $C = A \cdot B$ nötig ?

Aufgabe 11

für DP1a

a) Seien A und B zwei symmetrische $n \times n-$Matrizen. Was muss gelten, damit $C = A \cdot B$ symmetrisch ist?

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$
Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von A mit dem Gauss-Algorithmus. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das überhaupt möglich ?

Aufgabe 12

für DP1a

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die $LR-$Zerlegung von A, *ohne* Zeilenpermutationen.

b) Lösen Sie mit Hilfe von a) das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b^T = (1,\ 0,\ 1,\ b_4)$

c) Wie gross muss b_4 sein, damit es Lösungen gibt.

Aufgabe 13

a)

b)

c)

Aufgabe 14

a)

b)

c)

bitte wenden!

DMa1 Lösungen 2-te Klausur

Lösung 1

a) $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $e = f = \frac{1}{\sqrt{6}}$ und $d = \frac{2}{\sqrt{6}}$

b) $CC^T = I_3$, durch Nachrechnen

c) $x = C^T b = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

Lösung 2

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$ und $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) 1-ter Schritt: $Lc = Pb$, und somit $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ durch Vorwärtseinsetzen.

2-ter Schritt: $Rx = c$, und somit $x = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} \\ -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ durch Rückwärtseinsetzen

Lösung 3

Endschema ist bereits in `rref`:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	0	-2	3	1	b_1
0	-3	6	-6	0	$b_1 - 2b_2$
0	0	0	0	0	$-3b_1 - b_2 + b_3$

$m = 3$, $n = 5$ und $r = 2$

a) Es gibt Lösungen, falls $-3b_1 - b_2 + b_3 = 0$

b) $b_2 = 4$, $r = 2$, drei freie Parameter, $x_3 = \mu$, $x_4 = \nu$ und $x_5 = \lambda$, damit $x_1 = -1 + 2\mu - 3\nu - \lambda$ und $x_2 = 3 + 2\mu - 2\nu$

Lösung 4

a) vorzeitiger Abbruch nach einem Schritt: $s = 0$ und $t = 1$, $r = 1$

b) Abbruch nach zwei Schritten: $s \neq 0$ und $t = 1$, $r = 2$

c) $s \neq 0$ und $t \neq 1$, $r = 3$, kein freier Parameter.

d) $s = 0$ und $t \neq 1$

Lösung 5

a) Endschema für $Ax = 0$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	-2	-5	1	0
0	1	4	-1	9	0
0	0	1	1/2	2	0

$m = 4$, $n = 5$ und $r = 3$

Endschema in `rref`:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	0	0	2	3	0
0	1	0	-3	1	0
0	0	1	1/2	2	0

zwei freie Parameter: $x_4 = \mu$ und $x_5 = \nu$, damit: $x_1 = -2\mu - 3\nu$, $x_2 = 3\mu - \nu$ und $x_3 = -\frac{1}{2}\mu - 2\nu$

b) Endschema für $Ax = b$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1	2	-2	-5	1	b_1
0	1	4	-1	9	$b_2 - b_1$
0	0	-2	-1	-4	$b_3 + 2b_1$
0	0	0	0	0	$4b_1 + b_3 + b_5$

D.h. VB: $4b_1 + b_3 + b_5 = 0$, sonst gibt es keine Lösungen.

c) Eine eindeutige Lösung ist nicht möglich, da $r = 3 < n$.

Lösung 6

a) $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = e = \frac{\sqrt{2}}{6}$ und $d = \frac{4\sqrt{2}}{6}$

b) $x = B^T c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung 7

a) i) durch Nachrechnen: $(I_n + A)(I_n - A) = I_n^2 + AI_n - I_nA - A^2 = I_n - A^2$
$(I_n - A)(I_n + A) = I_n^2 - AI_n + I_nA - A^2 = I_n - A^2$

ii) $(I_n + A)(I_n - A) = I_n - A^2 = I_n$, d.h. $(I_n + A)^{-1} = (I_n - A)$

b) für $u^T u$: n Multiplikationen.
für $u\,u^T$: n^2 Multiplikationen
mal 2: eine Multiplikation und schliesslich eine Division für den Nenner: insgesamt: $n^2 + n + 2$

Lösung 8

a) $m = 4$, $n = 5$ und $r = 3$, zwei freie Parameter: $x_3 = \mu$ und $x_5 = \nu$, somit: $x_1 = 5-2\nu$, $x_2 = -6+2\mu+\nu$ und $x_4 = 4 - 3\nu$

b) $m = 4$, $n = 4$ und $r = 3$, ein freier Parameter für zwei verschiedene Lösungsvektoren: $x_3 = \mu$,
erste Lösung: $x_1 = 2$, $x_2 = -1 + 2\mu$ und $x_4 = 3$
zweite Lösung: $x_1 = 5$, $x_2 = -6 + 2\mu$ und $x_4 = 4$

Lösung 9

$X = 4 \times 3-$ Matrix

Endschema für $AX = C$:

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	0	0	0	2	1	6
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	3	0	4
0	0	0	1	-1	0	-2

Lösung 10

a) pro Matrix-Element c_{ij}: n Multiplikationen, insgesamt werden n^2 Elemente gerechnet,
also Geamtaufwand: n^3

b) $1-$te Zeile: $1 + 2 + 3 + \ldots + n$
$2-$te Zeile: $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)$
$3-$te Zeile: $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2)$
$j-$te Zeile: $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - j + 1)$
$n-$te Zeile: 1

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 \\ & & 1 & 2 & \ldots & n-2 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 1 \end{array}$$

Gesamtaufwand: $\sum\limits_{j=1}^{n} (n-j+1)\, j = \frac{1}{6}\,(n^3+3n^2+2n)$

Lösung 11

a) $C = A \cdot B$, $C^T = (A \cdot B)^T = B^T\, A^T = B \cdot A$, $C^T = C$, falls $A \cdot B = B \cdot A$, d.h. falls A und B kommutieren.

b) für $a \neq 0$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & -1/a^2 \\ a & -1 & 1/a \\ -a^2 & a & 0 \end{pmatrix}$

Lösung 12

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $Lc = b$: $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $c_4 = b_4 + 2 = 0$, d.h. $b_4 = -2$

c) $b_4 = -2$: $x_1 = -4 + \mu$, $x_2 = -3 + \mu$ $x_3 = -2 + \mu$, $x_4 = \mu$, freier Parameter.

Lösung 13

a)

b)