Klasse ET1b **DMa1 - 2- te Klausur** 4. Februar 2005

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Name:**

**Aufgabe 1**

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & a \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & b \\ -2x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & c \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = & d \end{array}\right.$$

a) Für welche $4-$Tupel $(a, b, c, d)$ ist das gegebene lineare Gleichungssystem lösbar?

b) Geben Sie für diese Fälle die Lösung an, Rang $r = ?$ des Gleichungssystems, Anzahl freie Parameter?

**Aufgabe 2**

a) Bestimmen Sie die *positiven* Grössen $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ und $f$ so, dass

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & d \\ a & b & e \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -c & f \end{pmatrix}$$ orthogonal wird, d.h. dass $C^T C = I_3$.

b) Was erhalten Sie für $C\,C^T$? (*mit* Begründung)

c) Lösen Sie mit $C$ aus a) das lineare Gleichungssystem $Cx = b$ mit $b = (1,\ 0,\ -1)^T$

**Aufgabe 3**

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & + & sx_2 & + & x_3 & + & t & = & 0 \\ sx_1 & & & + & tx_3 & + & 1 & = & 0 \\ sx_1 & + & sx_2 & + & 2x_3 & + & 2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Geben Sie Bedingungen für die reellen Parameter $s$ und $t$ an, so dass das lineare Gleichungssystem

a) eine Lösung mit *zwei* freien Parametern hat.

b) eine Lösung mit *einem* freien Parameter hat.

c) eine eindeutige Lösung hat.

d) keine Lösung hat.

Geben Sie den jeweiligen Rang des Gleichungssystems an.

**bitte wenden!**

**Aufgabe 4**

a) Die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix ist in `rref`.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Diskutieren Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem $Ax = b$, $m =$, $n =$ und $r =$

b) Was ändert an Ihrer Diskussion in a), falls gleichzeitig für zwei rechte Seiten gelöst wurde.

**Aufgabe 5**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die $LR-$Zerlegung von $A$ mit dem Gauss-Algorithmus, *ohne* Permutationen. (enstehende Brüche vollständig gekürzt)

b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, Vorwärts-, bzw. Rückwärtseinsetzen.

**Aufgabe 6**

Seien $L =$ eine $n \times n-$ untere Dreiecksmatrix und $R =$ eine $n \times n-$ obere Dreiecksmatrix.

a) Was ensteht bei der Multiplikation $L \cdot R$, wieviele Elemente sind i. allg. von Null verschieden?

b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand ( $=$ Anzahl Multiplikationen) bei der Multiplikation in a)

**DMa1** **Lösungen 2-te Klausur** **4. Februar 2005**

## Lösungen 1

a) VB: $a+b+c=0$ und $a-b+d=0$, Abbruch nach zwei Schritten

b) Rang $r=2$, zwei freie Parameter: $x_3=\mu$ und $x_4=\nu$
$x_1=-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}\mu+\nu$, $x_2=-\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}\mu$, wobei $a+b=-c$ und $a-b=-d$

## Lösungen 2

a) $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $b=c=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $e=f=\frac{1}{\sqrt{6}}$ und $d=\frac{2}{\sqrt{6}}$

b) $CC^T=I_3$, durch Nachrechnen

c) $x=C^Tb=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

## Lösungen 3

a) vorzeitiger Abbruch nach einem Schritt: $s=0$ und $t=1$, $r=1$

b) Abbruch nach zwei Schritten: $s\neq 0$ und $t=1$, $r=2$

c) $s\neq 0$ und $t\neq 1$, $r=3$, kein freier Parameter.

d) $s=0$ und $t\neq 1$

**Lösungen 4**

a) $m = 4$, $n = 5$ und $r = 3$, zwei freie Parameter: $x_3 = \mu$ und $x_5 = \nu$, somit: $x_1 = 5-2\nu$, $x_2 = -6+2\mu+\nu$ und $x_4 = 4-3\nu$

b) $m = 4$, $n = 4$ und $r = 3$, ein freier Parameter für zwei verschiedene Lösungsvektoren: $x_3 = \mu$,
erste Lösung: $x_1 = 2$, $x_2 = -1+2\mu$ und $x_4 = 3$
zweite Lösung: $x_1 = 5$, $x_2 = -6+2\mu$ und $x_4 = 4$

**Lösungen 5**

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4/5 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6/5 \end{pmatrix}$

b) vorwärts: $Lc = b$, $c^T = (0 \quad 1 \quad 2/3 \quad 1/2 \quad 2/5)$
rückwärts: $Rx = c$, $x^T = (-2/3 \quad -4/3 \quad -1 \quad -2/3 \quad -1/3)$

**Lösungen 6**

a) $A = L \cdot R$ ist eine $n \times n-$Matrix, alle Elemente i.allg. verschieden von Null, also vollbesetzt.

b) $1-te$ Zeile: $1+1+1+\ldots = n \cdot 1$
$2-te$ Zeile: $1+2+2+2+\ldots = 1+(n-1)\cdot 2$
$3-te$ Zeile: $1+2+3+3+3\ldots = 1+2+(n-2)\cdot 3$
$4-te$ Zeile: $1+2+3+4+4\ldots = 1+2+3+(n-3)\cdot 4$

$j-te$ Zeile: $1+2+\ldots+(j-1)+(n-j+1)\cdot j$

$n-te$ Zeile: $1+2+\ldots+(n-1)+n$

somit Rechenaufwand: $n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 3+\ldots+1\cdot n = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\cdot k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

zudem : $(n-1)\cdot 1+(n-2)\cdot 2+(n-3)\cdot 3+\ldots 1\cdot(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cdot k = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

insgesamt: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{k=1}^{n} k^2$, d.h. $O(n) = \frac{n^3}{3}$

also doppelt so gross, wie wenn zwei untere bzw. obere Dreiecksmatrizen miteinander multipliziert würden.